



# **Bober 2014**

**Naloge in rešitve šolskega tekmovanja**

# Kazalo nalog

|                    |    |                    |    |
|--------------------|----|--------------------|----|
| Nalepke            | 4  | Pecivo             | 25 |
| Slika z morja      | 5  | Zajčje luknje      | 26 |
| Zalivanje          | 6  | Sekanje dreves     | 28 |
| Zobne krtačke      | 7  | Kitajsko računalo  | 29 |
| Biserne ogrlice    | 8  | Zlatniki           | 31 |
| Lešniki            | 9  | Zidni robot        | 33 |
| Ladijska okna      | 10 | Cenena roba        | 35 |
| Igrišče            | 12 | Kvadrati           | 37 |
| Pokvarjena ura     | 13 | Neznani prijatelj  | 39 |
| Preurejanje        | 14 | Mafija             | 41 |
| Bobri in darila    | 15 | Kdo je večji       | 42 |
| Bobrovi prijatelji | 16 | Vzdržljivo omrežje | 44 |
| Mostovi            | 17 | Logično vezje      | 46 |
| Pot ob reki        | 18 | Sprehod po oblakih | 48 |
| Skrivno sporočilo  | 19 | Povej svoje ime    | 51 |
| Risanje            | 20 | Dvojiška polovica  | 53 |
| Napaka po telefonu | 22 | Skrivalnice        | 54 |
| Poplavljanje       | 23 | Gobelin            | 55 |

## **Izbor nalog za tekmovanje in prevod: Programski svet tekmovanja,**

Janez Demšar (predsednik; FRI, Univerza v Ljubljani)

Alenka Kavčič (FRI, Univerza v Ljubljani)

Nino Bašič (FMF, Univerza v Ljubljani)

Špela Cerar (PeF, Univerza v Ljubljani)

Marjan Horvat (FERI, Univerza v Mariboru)

## **Pomoč pri izboru in obdelavi nalog za prvo triletje:**

Andreja Filipič (OŠ Spodnja Idrija), Tanja Čuk (OŠ Spodnja Idrija)

**Tehnična pomoč pri izvedbi:** Gašper Fele Žorž, Milutin Spasić, Dean Gostiša in drugi s FRI UL.

# O tekmovanju in knjižici

Novo tekmovanje, nova zbirka nalog. Tokrat tudi za srednje šole in gimnazije.

Knjižica je namenjena učiteljem, ki se želijo pogovoriti o nalogah z učenci ali pa uporabiti naloge pri pouku, krožku, podaljšanem bivanju... Tako kot otroci radi tečejo, tudi radi razmišljajo in naša naloga je poskrbeti, da jih veselje ne mine in ne postanejo z leti počasnejši tako po telesu kot po duhu.

Knjižica je namenjena učencem in dijakom. Ne le kot priprava za prihodnja tekmovanja. To še najmanj. Uporabljajte jo kot zbirko miselnih problemov. Morda so nekateri za vas prelahki, drugi pretežki. Uredili smo jih po težavnosti, pa naj vsak sam ugotovi, kje se mu splača začeti in kje končati.

Knjižica je namenjena organizatorjem tekmovanja, da imamo na kaj biti ponosni. ;) V tekmovanje je bilo vloženega veliko dela, zato nas veseli, da postaja vedno bolj priljubljeno in množično. Ne le pri nas, temveč tudi v svetu: naloge smo opremili z zastavicami, ki povedo, iz katere države izvira posamezna naloga. Kar pisano, ne?

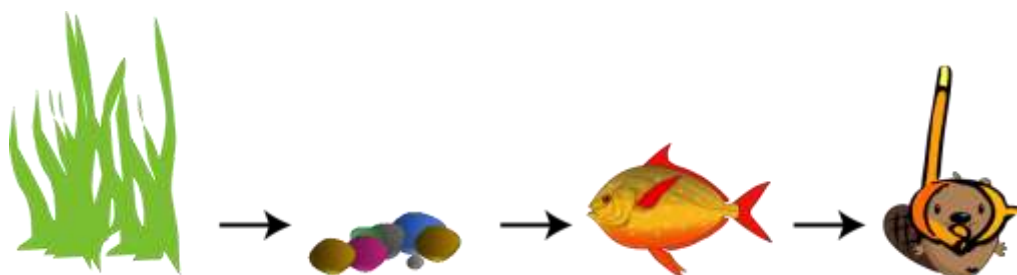
Trenutna knjižica je "začasna". Ko bo za nami tudi državno tekmovanje, se bo tem 36 nalogam pridružilo še 25 novih. A tudi teh bo tistim, ki imajo radi takšne naloge, prehitro zmanjkalo. Kaj vzeti roke takrat? Tule je nekaj naslovov, ki vas bodo potešili:

- domača stran tekmovanja, [tekmovanja.acm.si/bober](http://tekmovanja.acm.si/bober), na kateri boste našli tudi stare knjižice in naloge,
- več kot 120 nalog s preteklih tekmovanj, rešitve in kup drugega materiala za učitelje, [frača.si/bober](http://frača.si/bober),
- zbirka aktivnosti za pouk računalništva brez računalnika, [www.vidra.si](http://www.vidra.si).

Naj vam bo reševanje v veselje.

Programski svet tekmovanja

Bobrček Janezek lepi nalepke na sliko akvarija: najprej travo, nato kamne, ribo in na koncu bobra.



Kakšen je končni izdelek?

A.



B.



C.



D.

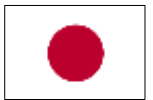


## Rešitev

Končni izdelek kaže slika A. Slika B je napačna, ker bober ni na vrhu – riba je pred njim. Slika C je napačna, ker je trava pred ribo. Slika D je nemogoča, ker riba plava skozi travo.

### Računalniško ozadje

Pri programiranju moramo razmišljati o tem, v kakšnem vrstnem redu moramo podati ukaze, da dobimo, kar želimo.



Bober Matjaž bi rad poslal Alenki sliko z morja. Alenka bi rada sliko, na kateri

- je sončnik,
- Matjaž nima kape,
- se vidi morje.

Katero sliko bo poslal?



## Rešitev

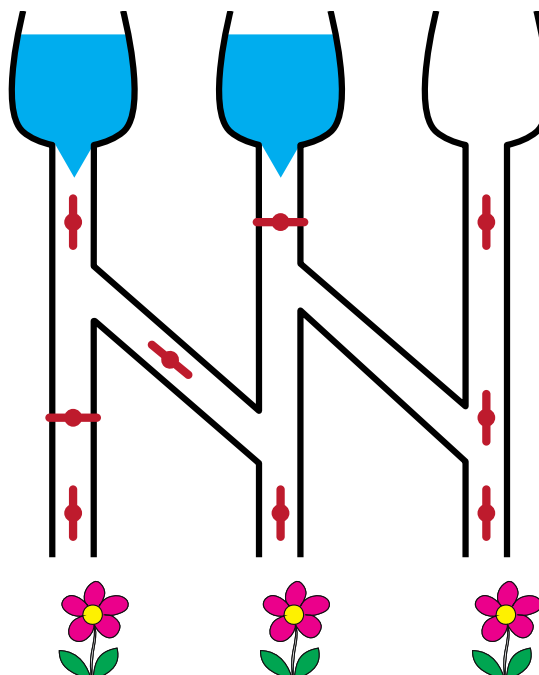
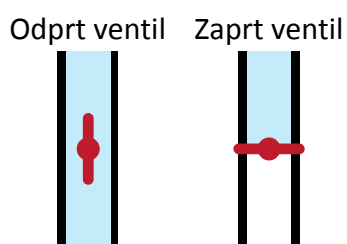
Poslal ji bo zadnjo sliko.

Sončnik je na drugi, peti, sedmi in osmi sliki. Matjaž je brez pokrivala na tretji, četrti, sedmi in osmi. Morje se vidi na prvi, drugi, četrti in osmi.

## Računalniško ozadje

Vsako sliko opišimo s tremi črkami D ali N. D na prvem mestu bo povedal, da je na sliki sončnik; če ga ni, bo na prvem mestu N. Črka na drugem mestu označuje, ali je Matjaž gologlav (D) ali ne (N). Tretji znak bo povedal, ali se na sliki vidi morje (D) ali ne (N). Slike, po vrsti, opišemo z NND, DND, NDN, NDD, DNN, NNN, DDN in DDD. Če bi namesto D in N pisali 1 in 0, bi dobili 001, 101, 010, 011, 100, 000, 110 in 111. Različnih možnosti je natančno toliko, kolikor je številčk, ki jih lahko pokažemo s tremi prsti. (Ne moremo pokazati s tremi prsti le treh številčk? Ne, ne. Poglej <http://vidra.si/do-koliko-lahko-steje-stonoga>, pa boš izvedel, kako je s tem.)

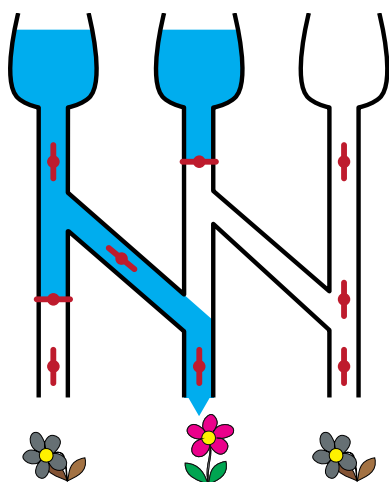




Katere rože bodo zalite?

- A. B.
- C. D.

## Rešitev

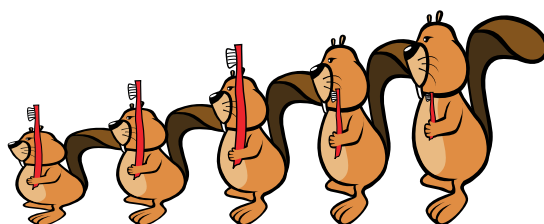


### Računalniško ozadje

Računalniki so sestavljeni iz čipov, ti pa iz "logičnih vrat". Ta se obnašajo podobno kot ventili iz naloge, le da se skozi njih namesto vode pretaka elektrika, namesto cevi pa jih povezujejo žice.

Vse elektronske naprave, od telefonov do najbolj zapletenih računalnikov, so sestavljene le iz ogromnega števila takšnih "električnih ventilov".





Ana Beno Cilka Dani Eva

Vsak bober ima zobno krtačko primerno svoji velikosti. Danes so se malo poigrali in vzeli napačne.

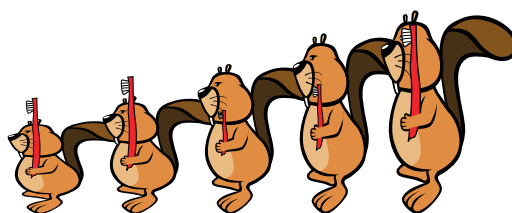
"Stojte!" zakliče mama. "Eva in Cilka, zamenjajta krtački!"

Ko jih zamenjata, nadaljuje: "Ana in Cilka, zamenjajta krtački."

Nato se je mama zmedla. Kateri par mora še zamenjati krtački, da bo imel vsak bober svojo?

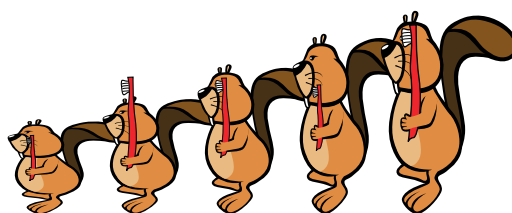
## Rešitev

Ko zamenjata krtački Eva in Cilka, so bobri videti tako.



Ana Beno Cilka Dani Eva

Ko jih nato zamenjata Ana in Cilka, dobimo tole.



Ana Beno Cilka Dani Eva

Krtački morata torej zamenjati še Beno in Dani.

## Računalniško ozadje

Programerji so podobni mamam, le da ne ukazujejo bobrom, kako naj si menjajo krtačke, temveč računalnikom, kako naj premikajo podatke po pomnilniku.





Princesa je na plesu nosila biserno ogrlico na desni. Zvečer si jo je odpela in jo položila v predal k ostalim. Kot velewa navada, mora danes nositi isto ogrlico. Vendar ima v predalu štiri. Katera je prava?



- A.
- B.
- C.
- D.

## Rešitev

Prava je ogrlica B.

V ogrlici A je vsaka temna kroglica sama zase, medtem ko sta na ogrlici, ki jo je nosila na plesu, dve črni kroglici ena zraven druge. C ima le 12 kroglic, ogrlica s plesa pa jih je imela 13. D ima šest temnih kroglic namesto pet.



## Računalniško ozadje

Biseri so nanizani po določenem vzorcu. Da najdemo pravo ogrlico, je potrebno odkriti ta vzorec.

V računalništvu pogosto primerjamo reči iz različnih virov. Pri delu s slikami pogosto iščemo delček slike znotraj večje slike: programi za obdelavo slik znajo, recimo, poiskati slike, na kateri je določena oseba.

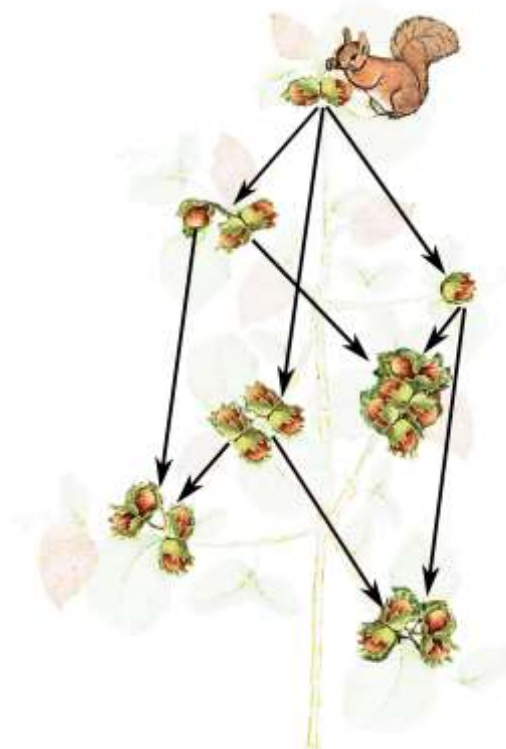




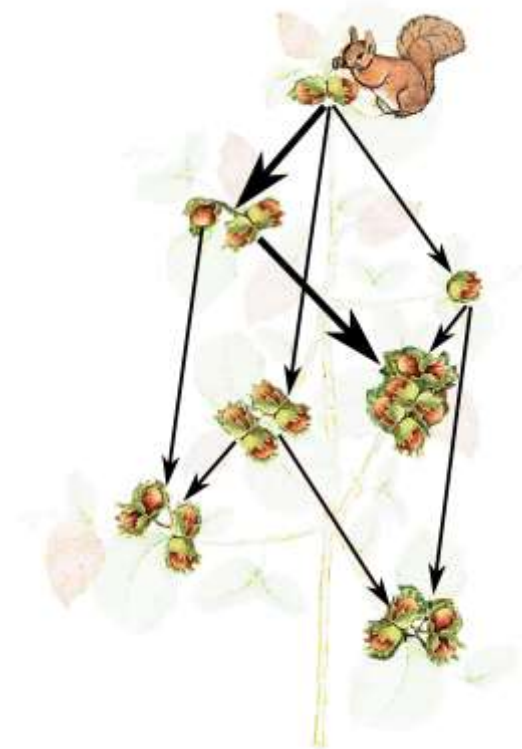


Veverica se spušča po leski in nabira lešnike.

Hoditi sme le po puščicah. Koliko lešnikov bo nabrala, če gre po poti, na kateri jih bo največ?



## Rešitev



Če gre po poti na levi sliki, bo nabrala enajst lešnikov.

### Računalniško ozadje

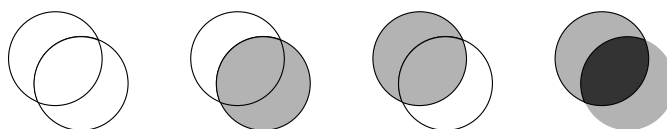
Nalogo najlažje rešimo tako, da preverimo vse možne poti in pazimo, da nobene ne izpustimo. Računalnikarji temu učeno rečejo "izčrpno preiskovanje".

Tako reševanje je možno zato, ker je različnih poti le malo. Če bi jih bilo več, bi morali uporabiti bolj zapletene postopke, ki ne pregledajo vseh poti, vendar so narejeni tako, da zagotovo ne prezrejo najboljše.

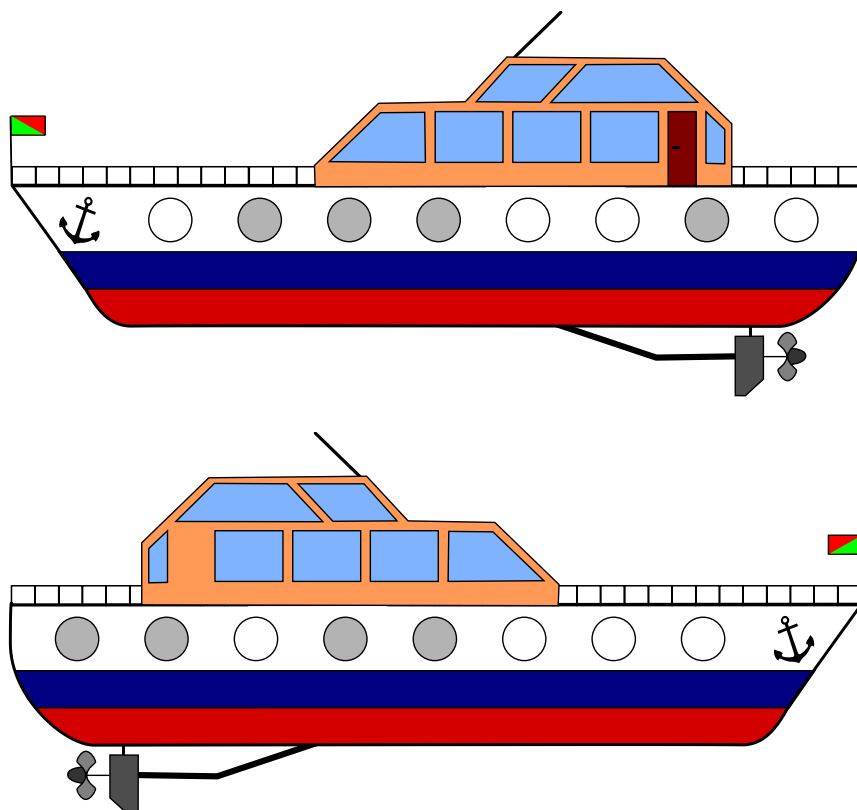




Ladijska okna so prosojna ali zatemnjena. Če pogledamo skozi dve zatemnjeni okni, postavljene eno za drugo, vidimo popolnoma temno okno.



Spodnji sliki kažeta levo in desno stran neke ladje.



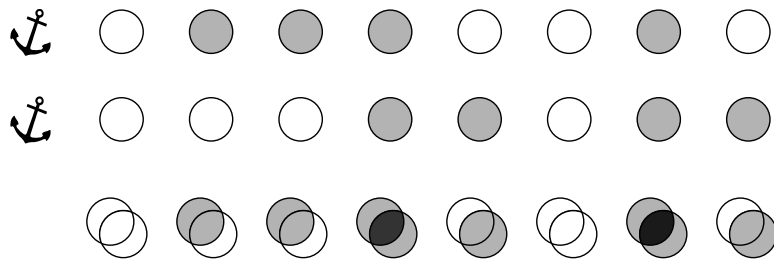
Če se postavimo na levo stran ladje, tako da se okna na levem in desnem boku ladje ravno prekrivajo, in pogledamo "skozi ladjo", kakšna okna bomo videli?

- A.
- B.
- C.
- D.



## Rešitev

Pri reševanju naloge ne smemo pozabiti "obrniti" ladje, ko razmišljamo o oknih na desni strani. Videli bomo tole:



### Računalniško ozadje

Računalnikarji (matematiki pa sploh) pogosto seštevamo cele vrstice števil. Takšnim vrsticam pravimo "vektorji" in jih seštevamo "po parih", takole

$$\begin{aligned} &<0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0> \\ + &<0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1> \\ = &<0, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 1> \end{aligned}$$

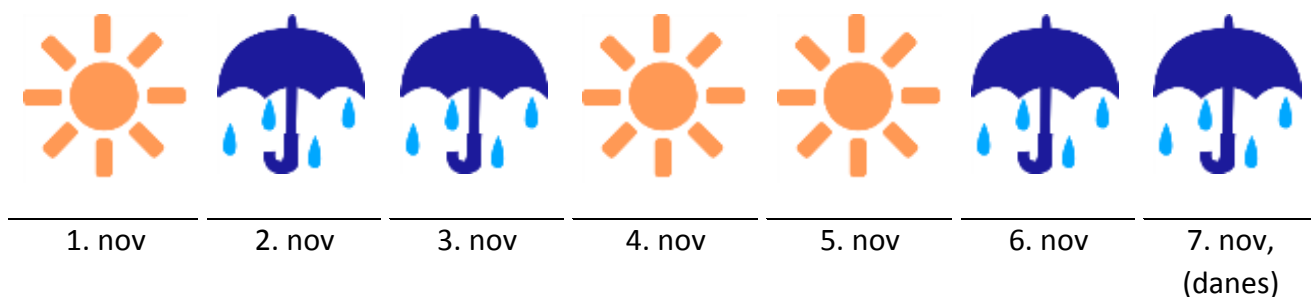




Bober Marko se takole odloči, kje se bo igral:

- Če je sončno, gre plavat v reko.
- Če dežuje, vendar je bilo včeraj sončno, se igra v hiši.
- Če dežuje že natančno dva dni zapored, se igra na rečnem bregu.
- Če dežuje že vsaj tri dni zapored, se ne igra.

Oglej si, kakšno je bilo vreme v zadnjem tednu. Danes smo sedmega novembra. Kje se bo igral?



## Rešitev

Igra se na rečnem bregu, saj dežuje drugi dan zapored.

### Računalniško ozadje

Ena od osnovnih sestavin računalniških programov je pogojni stavek, s katerim določimo, da naj se nek del programa izvede le, kadar drži določen pogoj. Ko se Marko odloča, kje se bo igral, izvaja preprost "program".





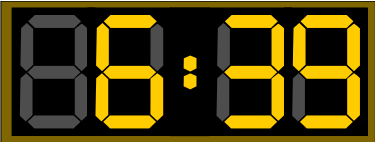
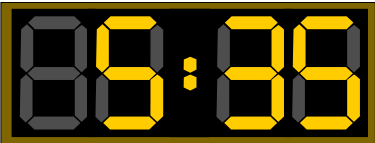
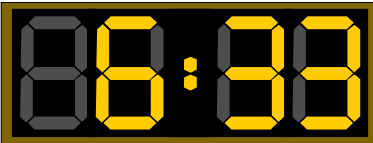
Bober Martin ima uro, ki kaže številke tako, kot je narisano na sliki.



Včeraj mu je padla na tla in (natančno!) ena črta se ne prižiga več. Trenutno kaže



vendar Martin ve, da ura ne more biti toliko – morda je več, morda manj. Koliko bi lahko bila?

- A.  B. 
- C.  D. 

## Rešitev

Pravilni odgovor je A, 6:39.

B je napačen, ker sta dodani dve črtici (ena pri 8 in ena pri 9). C ni pravilen, ker je ena črtica odzeta (pri 5). Tudi D ne more biti pravilen, ker pri spreminjanju 5 v 3 eno črtico dodamo in eno odzhamemo.

Kakšni so drugi možni časi? Vse možne spremembe števk so  $6 \rightarrow 8$ ,  $3 \rightarrow 9$ ,  $5 \rightarrow 6$  ali  $9$ . Torej lahko 6:35 spremenimo v 8:35, 6:95, 6:36 ali 6:39. Ker ura ni nikoli 6:95, bi bila poleg pravilnega odgovora možna še 8:35 in 6:36 – vendar nista bila med ponujenimi odgovori.

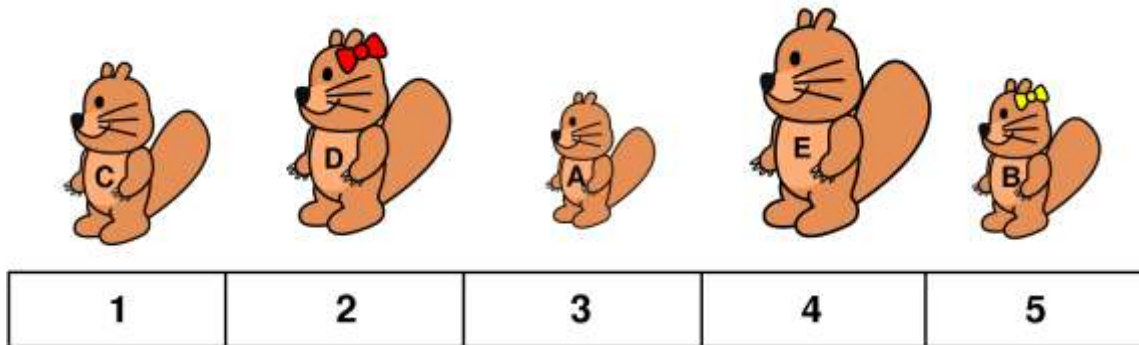
## Računalniško ozadje

Naloga zahteva logično razmišljanje. Na podoben način bi razmišljali, kadar bi iskali napako v programu ali računalniku.





Mama Jelka ureja svoje otroke po velikosti. Na začetku stojijo takole:

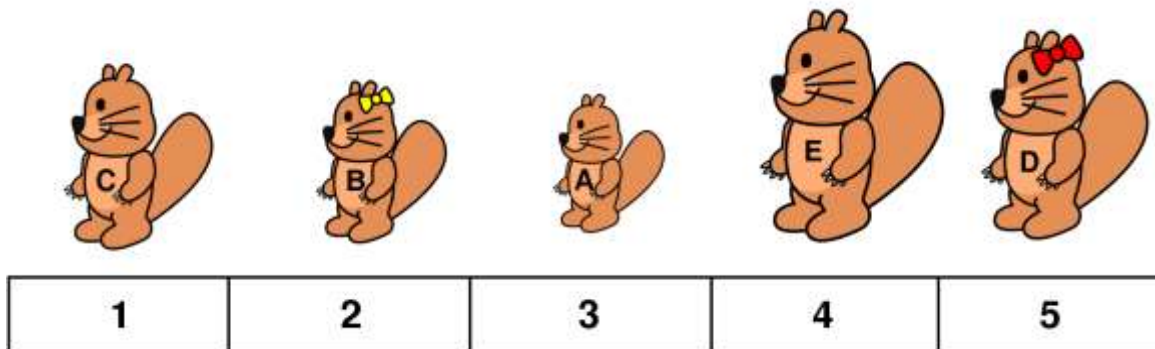


Reče jim: "2 in 5, zamenjajta se!" in bobra, D in B, ki stojita na drugem in petem mestu se zamenjata. Katere pare bobrov je potrebno še zamenjati, da bodo urejeni po velikosti (A, B, C, D, E)?

- A. 1 in 3; 4 in 5
- B. 1 in 3
- C. 2 in 4; 1 in 3; 3 in 5
- D. 1 in 2; 2 in 3; 3 in 4; 4 in 5

## Rešitev

Pravilni odgovor je A. Po maminem ukazu stojijo v zaporedju C, B, A, E, D.



Zamenjati je potrebno še C in A ter E in D, torej 1 in 3 ter 4 in 5.

## Računalniško ozadje

Mama je kot programer, ki sestavlja program, le da ga ne izvaja računalnik temveč njeni bobrčki.





Bober Nikola potuje s spodnjega levega dela gozda na obisk k prijateljici Ani zgoraj desno. Vedno se premika le gor in desno, nikoli dol ali levo in nikoli po diagonali. Ker je danes hladno, se mora izogniti tudi jezeru.

Na svoji poti srečuje darila in bobre. Vedno, ko najde darilo, ga pobere. Ko sreča bobra, mu da darilo. Izbrati mora takšno pot, da bo vedno, ko sreča bobra, imel pri roki darilo zanj, poleg tega mu mora na koncu ostati še darilo (eno samo!) za Ano.

Kako dolga je najkrajša možna pot do Ane?



## Rešitev

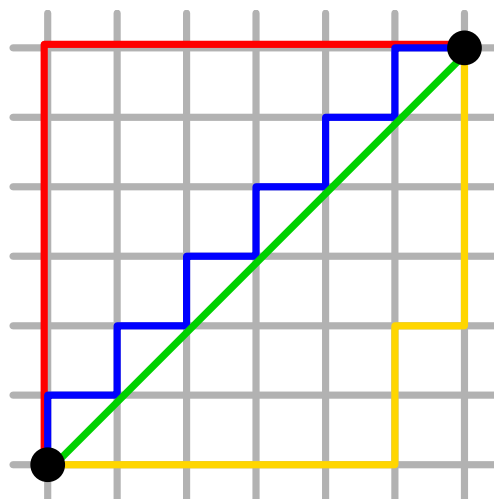
Vse poti do Ane so dolge 8 korakov, saj mora narediti štiri korake na desno in štiri gor. Poti se razlikujejo le v vrstnem redu.

Zgodbica o darilih in bobrih je le – nagajanje. ;)

## Računalniško ozadje

Ko govorimo o razdalji med dvema krajema, navadno mislimo na zračno razdaljo, razdaljo po ravni črti (zelena črta na desni sliki).

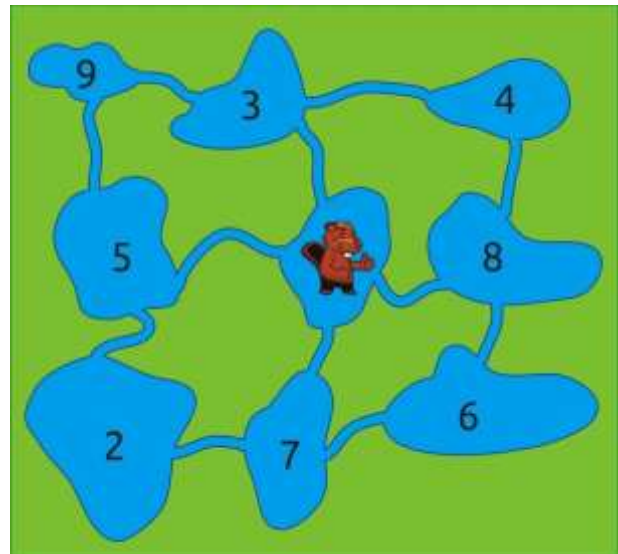
Včasih pa jo moramo meriti drugače. Predstavlja si mesto s pravokotnimi ulicami. Če nisi sraka, je razdalja, ki jo boš prehodil med dvema točkama, enaka številu vodoravnih in navpičnih odsekov ulic, ki jih moraš prehoditi, v kakršnemkoli vrstnem redu (ostale črte). Takšni razdalji pravimo tudi Manhattanska razdalja, po newyorški četrti Manhattan, ki ima takšne pravokotne ulice.





Bober Tine gre obiskat prijatelje, ki živijo v osmih jezerih okrog njegovega. Iz vsakega jezera lahko plava le v sosednja jezera, kot je narisano na sliki. Slika kaže tudi, koliko prijateljev ima v posameznem jezeru.

Plaval bo v štiri različna jezera. Največ koliko prijateljev lahko obiše na ta način?

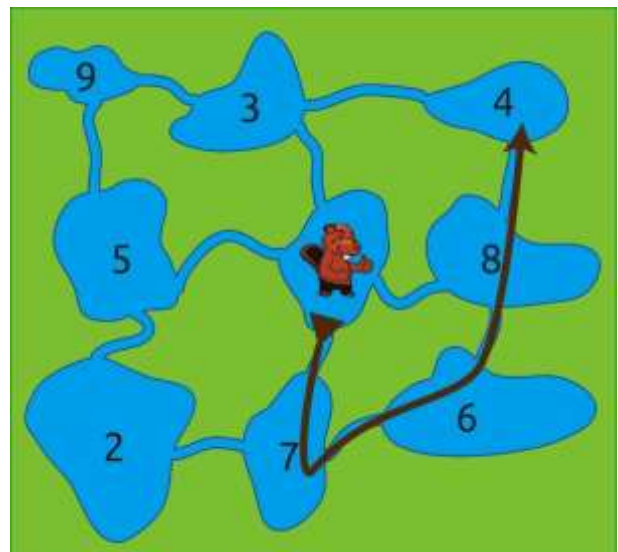


## Rešitev

Iti mora po poti, ki jo kaže slika, in bo obiskal  $7 + 6 + 8 + 4 = 25$  prijateljev.

### Računalniško ozadje

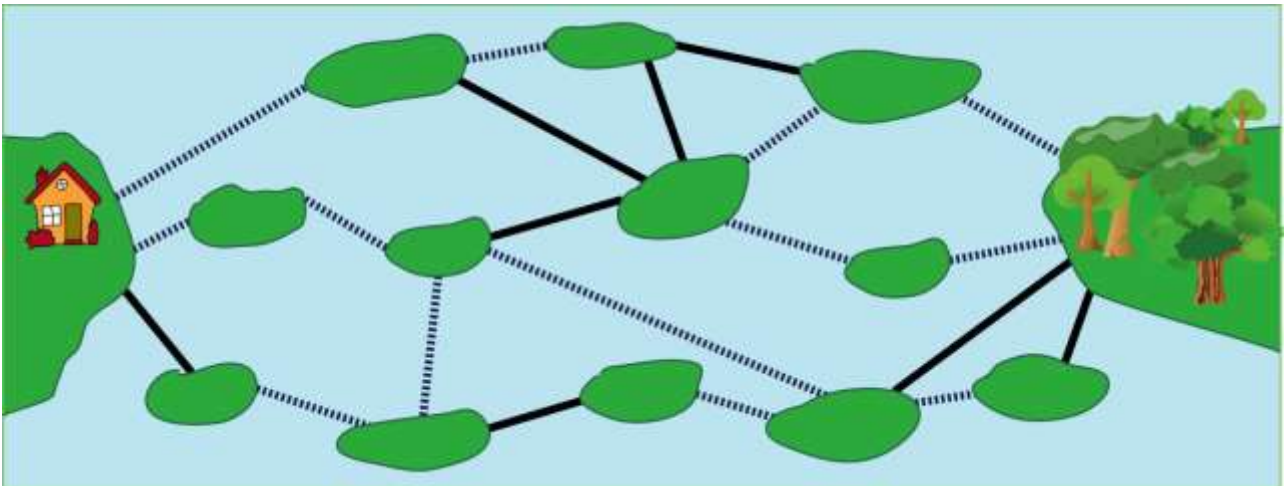
Naloga je podobna prejšnji nalogi, Lešniki. Tudi tu lahko poiščemo rešitev tako, da si ogledamo vse možne poti. Če bi bilo jezer več, pa bi morali uporabiti bolj zvite postopke.







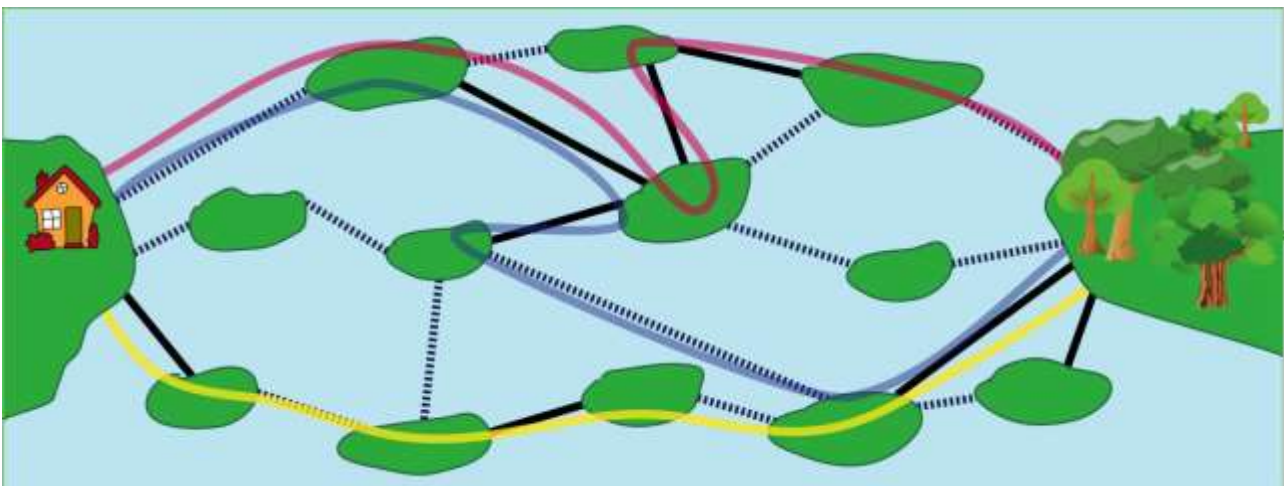
Med mestom in otokom z velikim gozdom je polno otočkov, povezanih z mostovi. Nekateri mostovi so brezplačni (polne črte), za nekatere pa je potrebno plačati (črtkane črte).



Sandi bi rad šel iz mesta v gozd. Pri sebi ima dovolj denarja za dva plačljiva mostova. Najmanj koliko mostov, skupno, bo moral prečkati?

## Rešitev

Pet. Nekaj možnih poti kaže slika.



## Računalniško ozadje

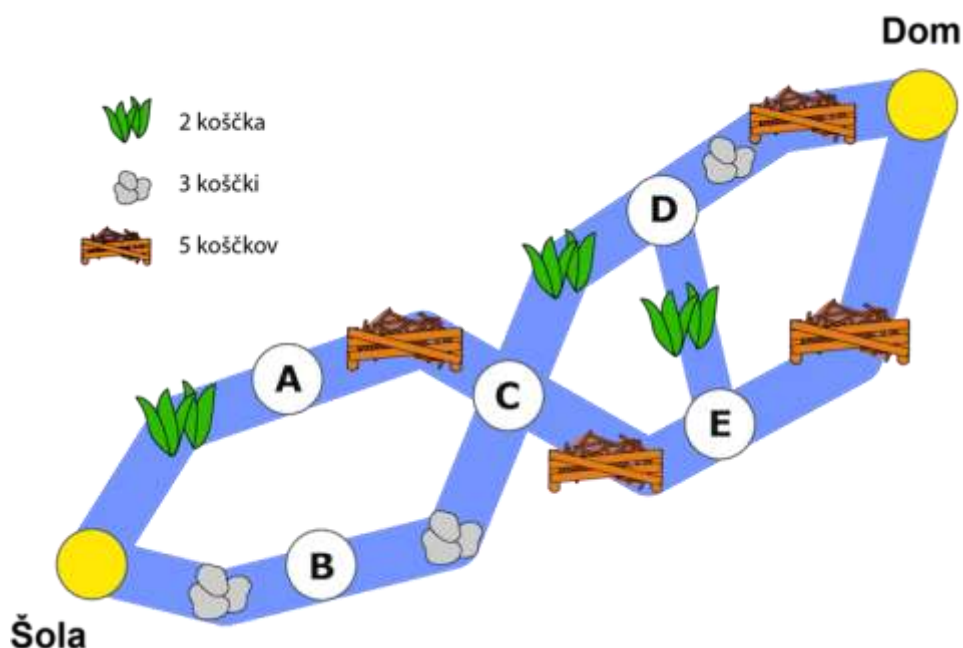
Naloga kaže znan problem iz računalništva: iskanje najkrajše ali najcenejše poti. Podoben problem računajo sistemi za pomoč pri vožnji, ki ga tvoji starši morda uporabljajo v avtomobilu, ko greste v kake neznane kraje.





Bober Lenart se vrača po reki iz šole domov. Na reki so različne ovire, ki mu jemljejo energijo. Ob sliki je napisano, koliko koščkov čokolade mora pojesti, da premaga posamezno vrsto ovire.

Ker bobri pazijo na zobe in ne marajo čokolade, gre Lenart vedno po poti, ki mu vzame najmanj energije. Mimo katerih mest, označenih s črko, gre? Koliko energije porabi za to?



## Rešitev

Šola → B → C → D → E → Dom. Poraba energije je 15.

Začel bo mimo črke A ali B. Pot mimo A mu vzame  $2 + 5 = 7$ , mimo B pa  $3 + 3 = 6$ , zato gre raje mimo B. Nato gre mimo C.

Preostanek poti lahko opravi prek D ( $2 + 3 + 5 = 10$ ) ali prek E ( $5 + 5 = 10$ ). Lahko pa gre tudi prek obeh točk, tako da gre po daljši (a manj naporni poti). Če gre prek D in potem E, mu to vzame  $2 + 2 + 5 = 9$ , če prek E in D pa  $5 + 2 + 3 + 5 = 15$ . Najboljša izmed teh štirih različic je D in E, ki mu vzame 9.

## Računalniško ozadje

Na tekmovanju Bober pogosto srečujemo naloge, v katerih je potrebno poiskati najkrajšo pot. Pot, ki jo iščemo tule, bi računalnikarji imenovali *najcenejša pot*.

Tudi v resničnem svetu nas pogosto zanimajo poti, ki niso nujno najkrajše, temveč so najboljše v kakem drugem pomenu. Ko načrtujemo poti, gremo navadno po avtocesti, čeprav bi bila pot prek vaških kolovozov morda krajša, a ne tudi hitrejša.





Bobri si pošiljajo skrivna sporočila tako, da vsako črko zamenjajo s kasnejšo črko v abecedi. Koliko črk naprej bodo šli, pove skrivno število.

Recimo, da Ana uporablja skrivno število 3. Tedaj zamenja A s Č, B z D, C z E, Č s F ... Zadnje črke abecede zamenja s prvimi – V z A, Z z B in Ž s C. Presledkov ne piše.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | Č | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | Š | T | U | V | Z | Ž |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| Č | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | Š | T | U | V | Z | Ž | A | B | C |

Tvoj prijatelj bober Janez ti je poslal skrivno sporočilo. Žal si pozabil, katero številko uporablja – za koliko mest zamika črke. Spomniš se le, da je besedo TRAVA zadnjič spremenil v AVECE.

Skrivno sporočilo se glasi ČEFECETFUJANM. Kaj ti sporoča?

## Rešitev

Če se T spremeni v A, R v V, A v E in V v C, je skrivno število 5. Če napišemo (slovensko) abecedo v vrstice, po pet znakov v vrsti, to pomeni, da sporočilo skrijemo tako, da vsak znak zamenjamo z znakom iz naslednje vrste. Beremo jih, seveda, obratno.

Sporočilo ČEFECETFUJANM preberemo kot ZABAVAOBPETIH.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| A | B | C | Č | D |
| E | F | G | H | I |
| J | K | L | M | N |
| O | P | R | S | Š |
| T | U | V | Z | Ž |

## Računalniško ozadje

Dandanes uporabljamo internet za pošiljanje mnogih sporočil, katerih vsebina mora ostati skrivna: od zaupnih elektronskih sporočil, do števil kreditnih kartic. S tem, kako skriti sporočila pred neprividnimi, se ukvarja veda, ki ji pravimo kriptografija.

Skrivanju podatkov na način, ki ga uporabljajo bobri iz naloge, pravimo Cezarjeva šifra, po Juliju Cezarju, ki naj bi ga uporabljal, da je skrnil svoja sporočila pred sovražniki.



Čebela-robot se lahko premika, riše in sledi črtam, ki jih je narisala. Pozna naslednje ukaze:

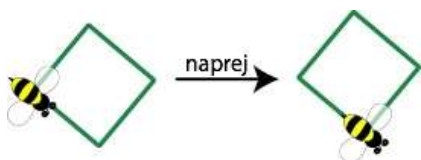
**kvadrat** nariše kvadrat: začne na trenutnem mestu in v trenutni smeri ter zavija na desno



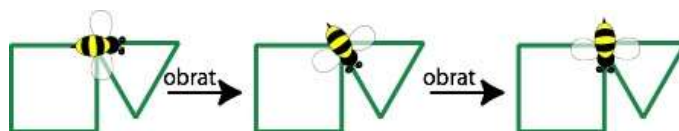
**trikotnik** nariše trikotnik: začne na trenutnem mestu in v trenutni smeri ter zavija na desno



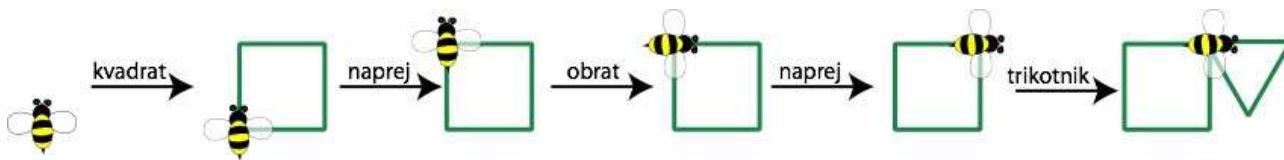
**naprej** gre do konca narisane črte v smeri, v katero trenutno gleda čebela



**obrat** obrne čebelo proti naslednji črti na desni



Če damo čebeli zaporedje ukazov **kvadrat, naprej, obrat, naprej, trikotnik**, nariše



Katero od spodnjih zaporedij ukazov bo narisalo tole sliko?

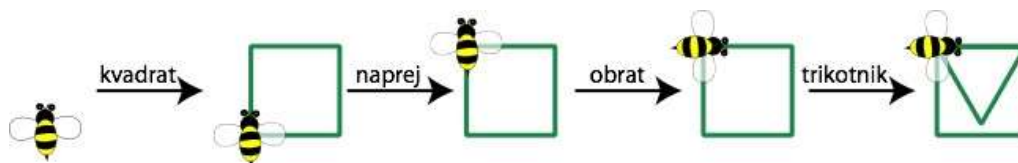


- A. kvadrat, obrat, naprej, trikotnik
- B. kvadrat, naprej, obrat, trikotnik
- C. trikotnik, obrat, kvadrat
- D. kvadrat, naprej, kvadrat, obrat, trikotnik

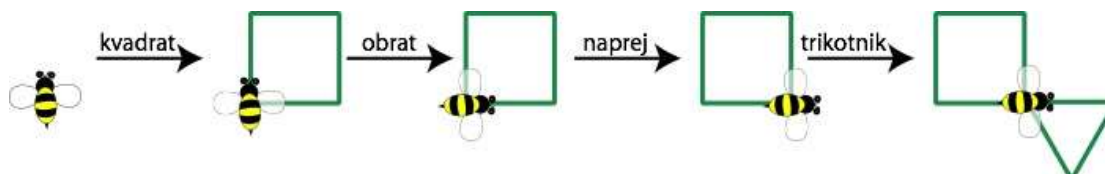


## Rešitev

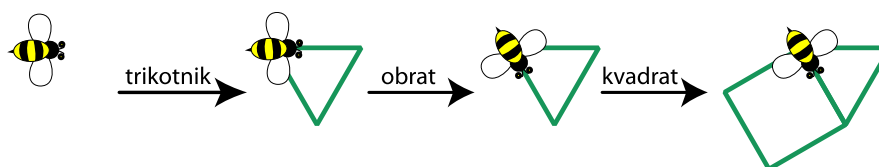
Pravilni odgovor je B.



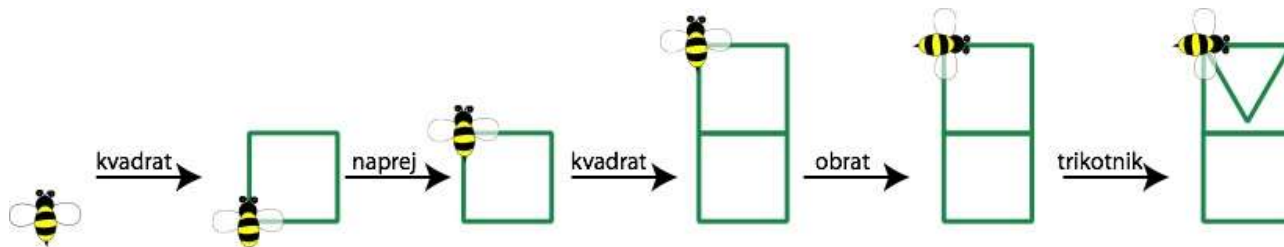
Odgovor A nariše trikotnik na napačnem mestu.



Odgovor C prav tako ne nariše pravilne slike.



Odgovor D je očitno napačen, saj nariše dva kvadrata.



## Računalniško ozadje

Programi, ki jih poganjamo na svojih računalnikih, so sestavljeni iz zaporedja ukazov, prav tako kot ti, s katerimi smo se igrali v tej nalogi, le da računalniški programi uporabljajo veliko več različnih ukazov in so veliko daljši.

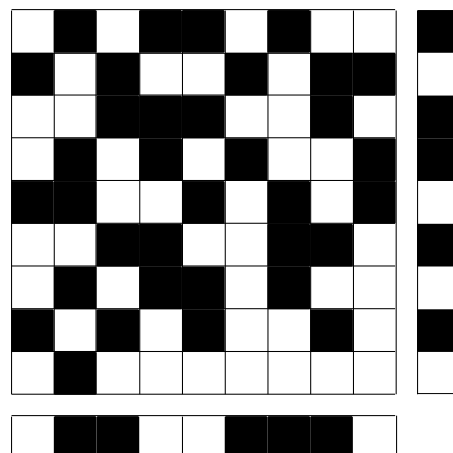
Naloga je podobna risanju z želvo, ki ga pogosto uporabljamo pri poučevanju programiranja. Želvo so si za Logo, enega prvih računalniških jezikov, namenjenih otrokom. Danes se lahko igraš z njo v modernejših okoljih, kot je, recimo, Scratch (<http://scratch.mit.edu>).





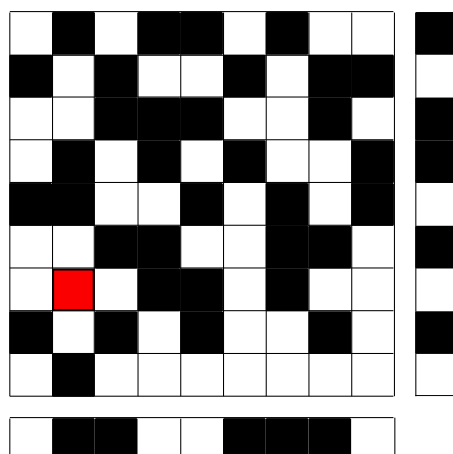
Akademski slikar bober Jaka je narisal sliko iz belih in črnih kvadratov. Po telefonu jo je sporočil kolegu, ki jo bo poustvaril po nareku. Da ne bi prišlo do napak, je na desni in spodaj dodal še en stolpec. Če je število črnih kvadratov v določeni vrstici **liho**, je v kontrolnem stolpcu v tej vrstici narisal **bel** kvadrat, sicer pa **črnega**. Podobno je storil s stolpci.

Kontrolni stolpec in vrstica sta prenešena pravilno, v sliki pa je ena napaka. Na katerem mestu?



## Rešitev

Število črnih kvadratkov v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu skupaj s kontrolno vrstico in stolpcem mora biti liho. V sedmi vrstici in v drugem stolpcu je sodo, torej mora biti napaka tam. Napačni kvadrataček je označen z rdečo. Na sliki je črn; če ga spremenimo v belega, se kontrolna vrstica in kontrolni stolpec ujemata s sliko.



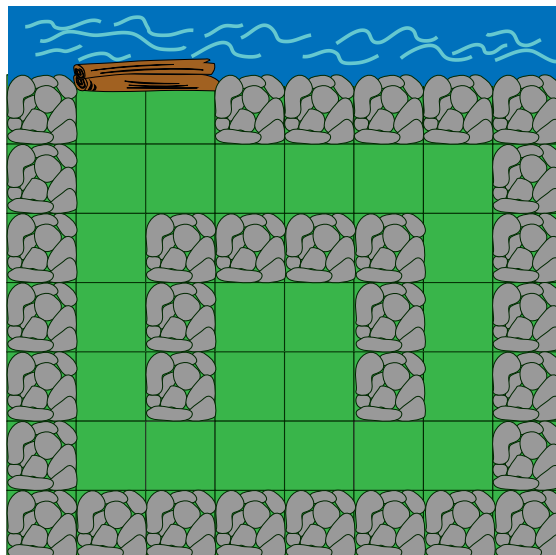
## Računalniško ozadje

Ko računalniki shranjujejo ali prenašajo podatke, na podoben način preverjajo, ali so shranjeni oziroma prenešeni podatki pravilni. Če si že kdaj reševal podobno nalogo, upamo, da nisi padel v past: dodatne kvadratke navadno pobarvamo tako, da je število črnih kvadratkov v vsaki vrstici in stolpcu sodo. Tule smo se pač odločili za liho.





Bober Krištof si pripravlja domovanje, zato bo poplavlil travnik.

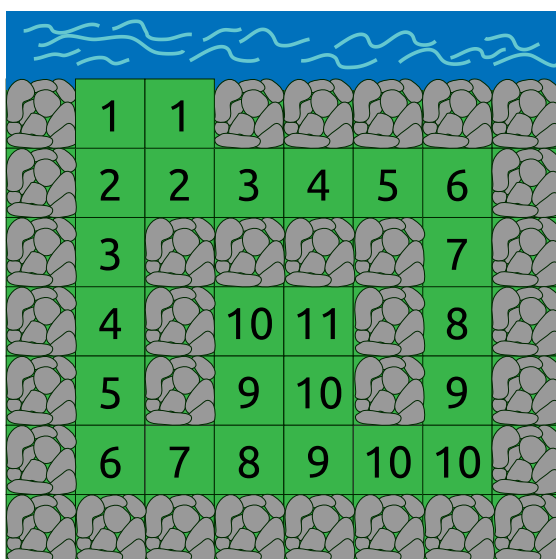


Vsako uro voda zalije sosednja polja vseh poplavljenih polj (zgoraj, spodaj, levo in desno, **ne pa po diagonali!**). Voda ne more teči skozi zidove.

Koliko časa bo minilo od takrat, ko Krištof odstrani hlode ob reki, do takrat, ko bo poplavljen ves travnik?

## Rešitev

Minilo bo 11 ur. Na spodnji sliki so označeni časi, ko je poplavljeno posamezno polje.





Nalogo rešimo tako, da "opazujemo" širjenje vode in zapisujemo čase, ki jih voda potrebuje do posameznega polja. Na polji ob reki napišemo enici. Na sosednji polji teh dveh polj napišemo dvojki. Na sosednji polji polj označenih z dvojkama napišemo trojki (razen, seveda, na polji, na katerih sta že enici in kjer je zid). Na sosede polj s trojkami napišemo štirice in tako naprej. Ko so popisana vsa polja, vemo, koliko časa bo potrebovala voda do vsakega od njih.

### **Računalniško ozadje**

Naloga spominja na iskanje najkrajše poti: za vsako polje nas zanima, kako dolga je najkrajša pot od reke. Odgovor, ki ga iščemo, je dolžina najkrajše poti do najbolj oddaljenega polja.

Postopek, s katerim nalogo rešimo, imenujemo tudi *iskanje v širino*, saj opazujemo "širjenje" vode. S podobnimi postopki rešujemo še veliko drugih, resničnih računalniških problemov.







Suzana in Aljaž sta odprla pekarno. Suzana peče pecivo v obliki črk A, B in O. Vedno speče vse tri oblike in jih obesi tako, da najprej natakne A, nato B, nato O. Aljaž jih medtem prodaja. Suzana jih peče hitreje, kot se prodajajo.



Če je pekarna videti, kot kaže slika: najmanj koliko kosov peciva sta prodala?

## Rešitev

Devet kosov.

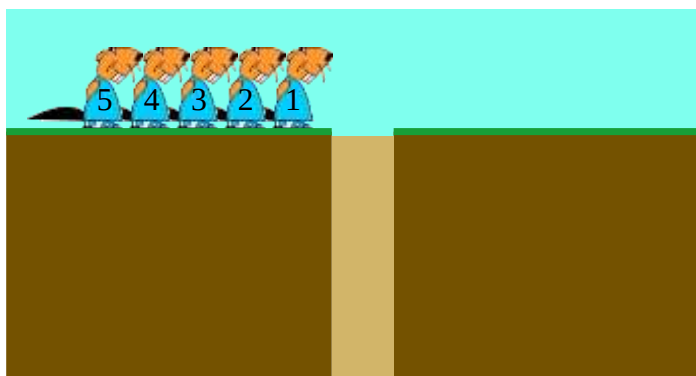
Kako dobimo takšno zaporedje? Napišemo zaporedje, ki vsebuje toliko Ajev, kolikor jih je na sliki: ABOABOABOABOABOABO. Nato prečrtamo, česar ni na sliki:

~~ABOABOABOABOABOABO~~. Preštejemo prečrtane črke: devet jih je.

## Računalniško ozadje

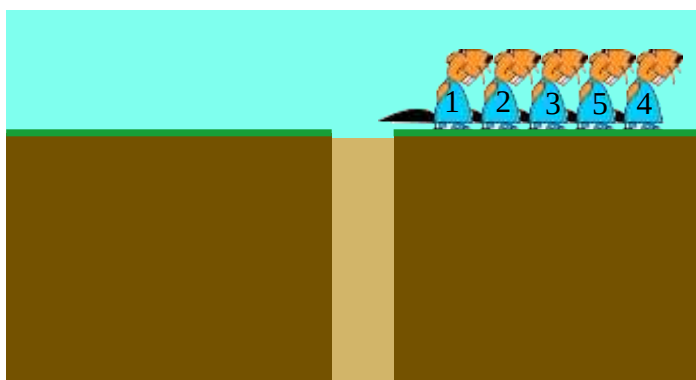
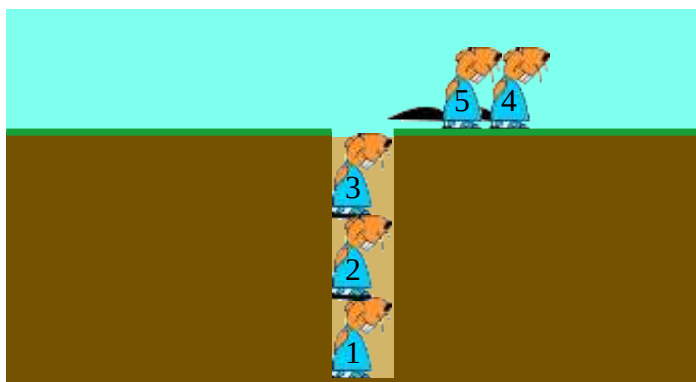
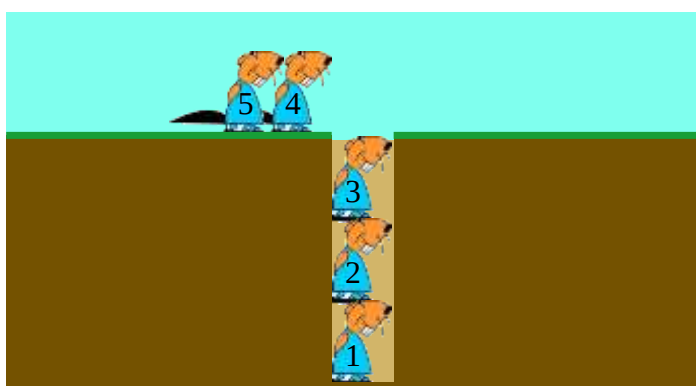
Naloga prikazuje nekaj, čemur računalnikarji pravijo sklad. Na sklad zlagajo številke ali kake druge reči (recimo pecivo). Ko jemljejo stvari s sklada, najprej vzamejo z njega tisto, kar so nazadnje shranili nanj – tako kot v nalogi.



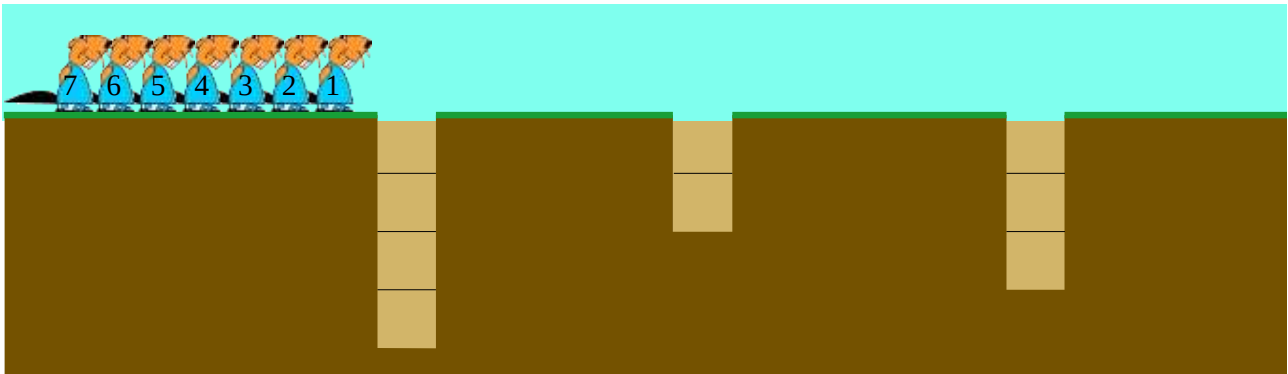


Kadar bobri pridejo do luknje, storijo tole: prvi bober skoči vanjo, drugi nanj in tako naprej, dokler ni luknja polna. Preostali bobri jo prečkajo. Ko so na drugi strani, bobre iz luknje enega za drugim izvlačejo in nadaljujejo pot.

Kot vidiš na slikah na levi, se vrstni red bobrov pri tem nekoliko spremeni.



Sedem bobrov, oštevilčenih s številkami 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, se je odpravilo po poti, na kateri jih, zaporedoma, čakajo luknje globine 4, 2 in 3. V kakšnem vrstnem redu (od leve proti desni) bodo na drugi strani lukenj?



## Rešitev

Luknja prestavi določeno število bobrov z začetka na konec vrste v obratnem vrstnem redu. Luknje globin 4, 2 in 3 bodo prestavile po 4, 2 in 3 bobre, torej

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 → 1, 2, 3, 4, 7, 6, 5

1, 2, 3, 4, 7, 6, 5 → 5, 6, 1, 2, 3, 4, 7

5, 6, 1, 2, 3, 4, 7 → 7, 4, 3, 5, 6, 1, 2

## Računalniško ozadje

Naloga se suče okrog podatkovne strukture, ki ji računalnikarji rečejo *sklad*. Na sklad lahko shranjujemo objekte (recimo številke – ali pa bobre), ko jih jemljemo z njega, pa jih dobivamo v obratnem vrstnem redu.





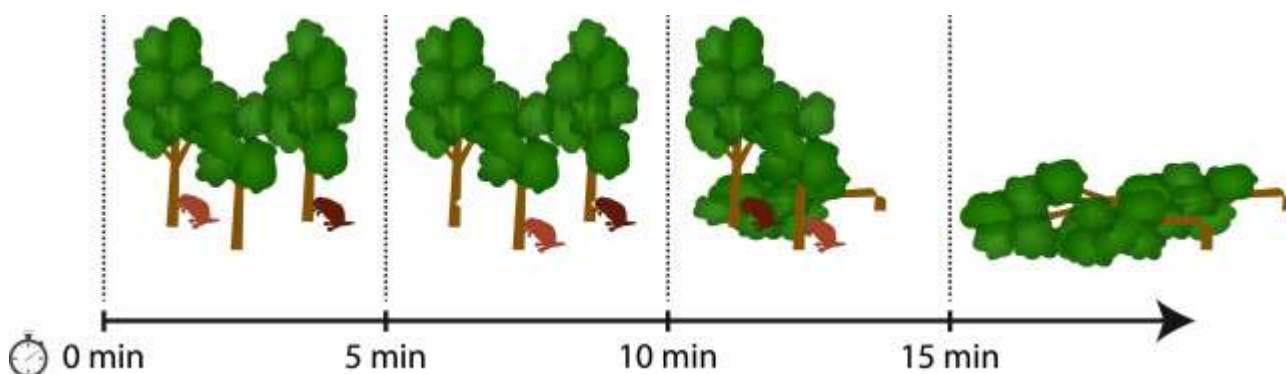
Bobri vedno podirajo drevesa sami: dva bobra ne moreta nikoli **istočasno** gristi istega drevesa. Dobro izurjen bober lahko podre drevo v desetih minutah.

Dva bobra imata nalogo podreti tri drevesa. Najmanj koliko časa bosta potrebovala, če se dobro organizirata?

## Rešitev

Na prvi pogled se zdi, da bosta potrebovala dvajset minut: v prvih desetih minutah bosta podrla vsak eno drevo, naslednjih deset minut pa bo eden grizel in drugi lenaril.

Vendar ni tako. Tri drevesa lahko preglodata v petnajstih minutah, če vsak gloda svoje drevo pet minut, nato pa se oba premakneta k drugim drevesom kot kaže spodnja slika.



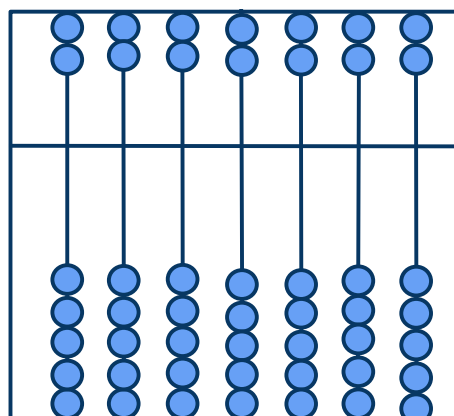
## Računalniško ozadje

Računalnikarji imenujejo ta problem *razporejanje opravil*. Današnji računalniki lahko počnejo več stvari istočasno, zato se mora operacijski sistem (Windows, Linux, OS X) odločati, v katerem trenutku bo računalnik počel kaj, da bodo programi tekli čim hitreje.

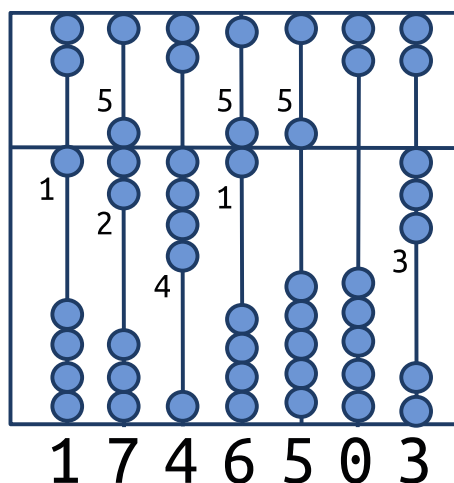




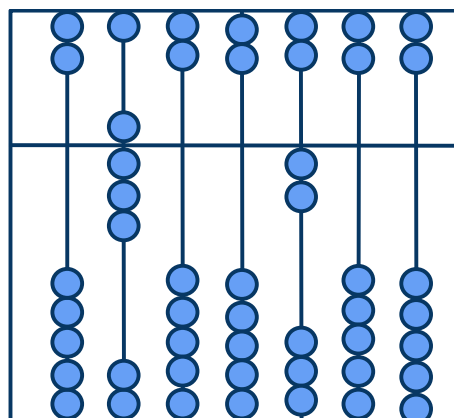
Kitajci za računanje uporabljajo posebne abakuse. Kroglice so razdeljene na spodnji in zgornji del; kroglice v spodnjem so vredne 1 in v zgornjem 5. Številko 0 sestavimo tako, da potisnemo vse kroglice stran od sredine, kot kaže slika na desni.



Številko 1746503 sestavimo takole:

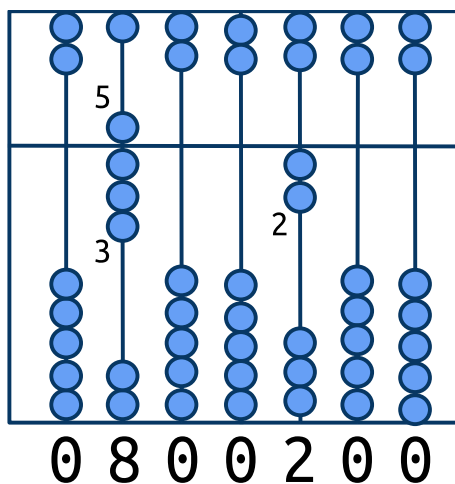


Katero številko pa kaže abakus na desni?



## Rešitev

Številka na abakusu je 0800200.



### Računalniško ozadje

Abakus je orodje, ki so ga že v pradavnini uporabljali namesto kalkulatorjev. S premikanjem kroglic so lahko z njim seštevali, odštevali in celo množili.

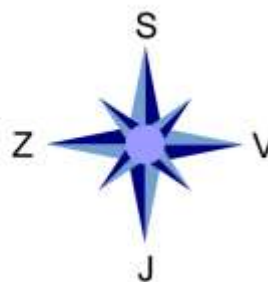
V tej nalogi smo uporabljali abakus z imenom Suanpan, ki ga še vedno uporabljajo v številnih azijskih državah. Računanje z njim je uvrščeno tudi na UNESCOv seznam kulturne dediščine človeštva.





Srečko in Zlatko sta se odpravila na lov za zlatniki na Otok zakladov. Srečko ima zemljevid otoka, na katerem je označeno, koliko zlatnikov se nahaja na posameznem področju. Ker se Zlatko na vetru vedno prehladi, na otoku pa piha močan severnik, se je odločil, da se bo skrival v zavetrju Srečka, torej tako, da bo stal vedno neposredno južno od Srečka. Tako bi na primer na prehojeni poti najprej na vzhod, nato na sever ter še dvakrat na vzhod (V-S-V-V), Srečko našel 35 zlatnikov, Zlatko pa bi lahko pobral le 31 zlatnikov, saj bi nekaj področij na njegovi poti že pred njim izpraznil Srečko.

|                                                                                               |    |    |    |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|
| 10                                                                                            | 8  | 6  | 8  | 9  |
| 3                                                                                             | 4  | 14 | 1  | 6  |
| Srečko<br>  | 16 | 5  | 15 | 0  |
| Zlatko<br> | 11 | 13 | 0  | 11 |



Katera od naslednjih poti bi omogočila Zlatku, da na poti pobere več zlatnikov kot Srečko?

- A. V-V-V-S
- B. V-S-S-V
- C. V-V-S-S
- D. V-V-S-V

## Rešitev

Preverimo vse ponujene poti in izračunajmo, koliko zlatnikov nabereta Srečko in Zlatko na vsaki od navedenih poti.

Pravilni odgovor je V-V-S-V, saj v tem primeru Srečko pobere  $16+5+14+1=36$  zlatnikov, Zlatko pa  $11+13+0+15=39$  zlatnikov.

Ostali odgovori so napačni, saj v vseh ostalih primerih Srečko nabere več zlatnikov. Na poti V-V-V-S nabere Srečko  $16+5+15+1=37$  zlatnikov, Zlatko pa le  $11+13+0+1=25$ . Tudi na poti V-S-S-V nabere Srečko več zlatnikov ( $16+4+8+6=34$ )





kot Zlatko ( $11+16+4+14=25$ ). Podobno velja tudi za pot V-V-S-S: Srečko nabere  $16+5+14+6=41$  zlatnikov, Zlatko pa le  $11+13+5+14=24$ .

### Računalniško ozadje

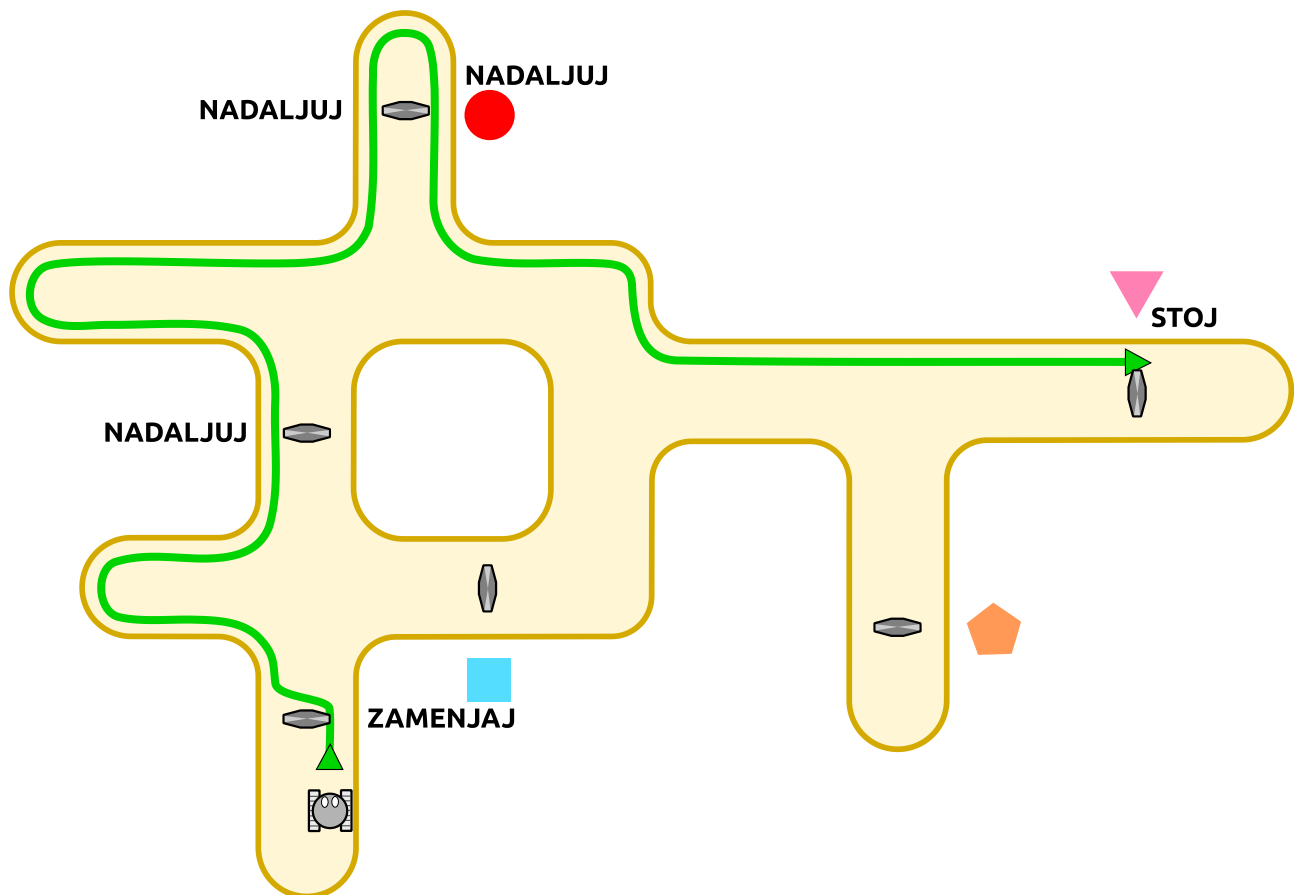
Čeprav naloga na prvi pogled deluje kot navadna uganka, nam podrobnejši pogled razkrije tudi njeno praktično uporabnost. Gre za iskanje optimalne poti skozi labirint, kateri se s časom spreminja ravno zaradi naših premikov po njem. Tak dinamičen pristop je tipičen za računalniške probleme. Problem najlažje rešimo tako, da simuliramo posamezne korake in poti. Tak pristop se pogosto uporablja tudi v računalništvu.





## Rešitev

Ustavil se bo ob rožnatem trikotniku.



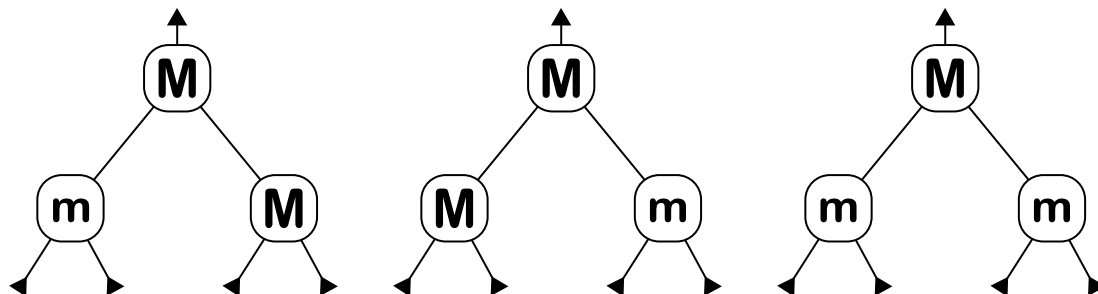
## Računalniško ozadje

Na podoben način kot robota iz te zgodbe lahko v resnici programiramo vozila in druge naprave, ki se same premikajo, zunanje kontrolne enote pa jim povejo, kje so in jih preusmerjajo.



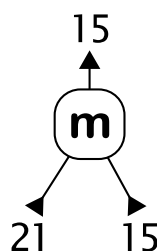


Boštjan je sestavil tri naprave, v katere vložimo štiri števila in vrnejo drugo največje od njih.

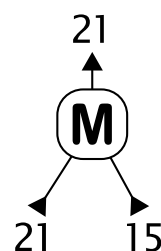


Naprave uporabljajo dva tipa enot, ki ju imenujemo "min" in "maks".

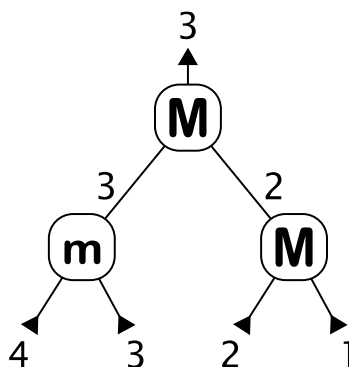
V min vstopita dve števili in na izhod pride manjše od njiju.



V maks vstopita dve števili in na izhod pride večje od njiju.



Če Boštjan, na primer, vstavi v prvo napravo (po vrsti) števila 4, 3, 2, 1, dobi število 3. To je pravilno, saj je 3 res drugo največje število.



Ko so bile naprave končane, je vanje vnesel le dve kombinaciji – in odkril, da nobena naprava ne deluje, kot mora: vsaka od njih je naredila napako pri vsaj eni od dveh kombinacij, ki ju je preskusil. Kateri kombinaciji je vnesel?

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| A. 1, 2, 4, 3 in 2, 3, 4, 1 | B. 1, 4, 2, 3 in 2, 3, 4, 1 |
| C. 2, 1, 3, 4 in 2, 3, 4, 1 | D. 1, 4, 2, 3 in 4, 1, 2, 3 |



## Rešitev

V ponujenih odgovorih se pojavlja pet različnih kombinacij. Za vsako od njih pogledjmo, kakšen odgovor vrnejo posamezne naprave.

| Kombinacija | Prva naprava | Druga naprava | Tretja naprava |
|-------------|--------------|---------------|----------------|
| 1, 2, 4, 3  | Napačno: 4   |               |                |
| 2, 1, 3, 4  | Napačno: 4   |               |                |
| 1, 4, 2, 3  |              | Napačno: 4    | Napačno: 2     |
| 4, 1, 2, 3  |              | Napačno: 4    | Napačno: 2     |
| 2, 3, 4, 1  | Napačno: 4   |               | Napačno: 2     |

Iščemo tak par kombinacij, da se bo vsaka od naprav zmotila vsaj na eni od njiju.

Pri kombinacijah v odgovoru A (1, 2, 3, 4 in 2, 3, 4, 1) se zmotita prva in tretja naprava, druga pa ne. Pri kombinacijah v B (1, 4, 2, 3 in 2, 3, 4, 1) se zmotijo vse tri naprave, zato je to pravilni odgovor. Pri kombinacijah v C (2, 1, 3, 4 in 2, 3, 4, 1) se zmotita le prva in tretja. Pri kombinacijah v D (1, 4, 2, 3 in 4, 1, 2, 3) se zmotita le druga in tretja.

Če moramo izbrati dve kombinaciji izmed naštetih, potrebujemo bodisi 1, 4, 2, 3 bodisi 4, 1, 2, 3, da bomo pokazali, da ne deluje druga naprava. Pri obeh kombinacijah se zmoti tudi tretja, tako da potrebujemo le še poljubno kombinacijo izmed ostalih treh, da pokažemo nedelovanje prve naprave.

Znaš poiskati kakšno kombinacijo, pri kateri se zmotijo vse tri naprave?

### Računalniško ozadje

Računalnikarji morajo previdno preveriti delovanje svojih programov. Kot vidimo v tej nalogi, ni dovolj, da preskusimo le eno ali dve vrednosti: preverjanje mora biti natančno in sistematično, da nam ne uide kak poseben primer, pri katerem programi ne delujejo.





Mali robot, ki je specializiran za risanje kvadratov, pozna tri ukaze:

**Oranžna** Nariši oranžno črto dolžine 1.

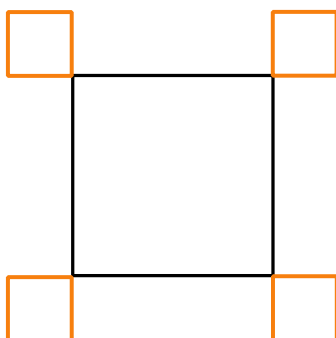
**Črna** Nariši črno črto dolžine 1.

**Obrat** Obrni se za 90 stopinj desno.

Ukaze lahko sestavljamo.

- Če naštejemo več ukazov, jih ločimo z vejico.
- Če pred ukaz napišemo številko in x, bo robot večkrat ponovil ukaz. Če napišemo, recimo **3 x Obrat**, se bo trikrat obrnil na desno.
- Če želimo ponoviti zaporedje več ukazov, jih zapremo v oklepaj. Tako bo, recimo, **3 x (Črna, Obrat)** trikrat narisal črno črto in se obrnil.

Narisali bi radi takšno sliko.



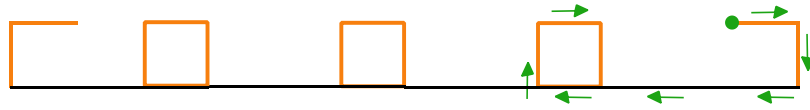
To lahko storimo na različne načine. Trije od spodnjih so pravilni. Kateri je napačen?

- A. 4 x (2 x (Oranžna, Obrat), 3 x Črna, 2 x (Oranžna, Obrat))
- B. 4 x (2 x (Oranžna, Obrat), Oranžna, 3 x Črna, Oranžna, Obrat)
- C. 4 x (3 x Črna, 3 x (Oranžna, Obrat), Oranžna)
- D. 4 x (Črna, 3 x (Oranžna, Obrat), Oranžna, 2 x Črna)

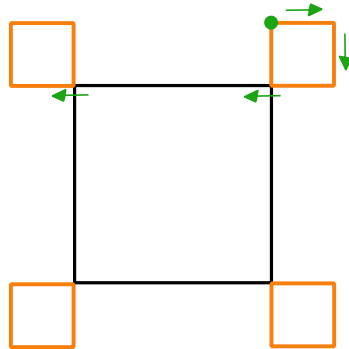


## Rešitev

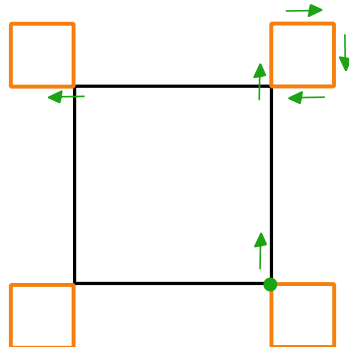
Napačno je zaporedje A, ki naredi tole.



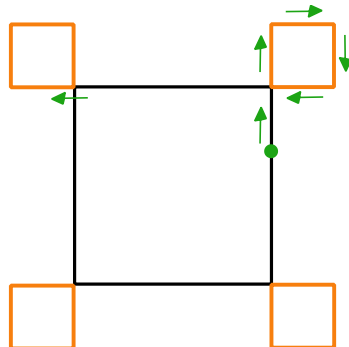
Zaporedje B riše takole



C takole



in D takole



## Računalniško ozadje

Računalniško ozadje je očitno: programiranje.





Ko smo skupino petih bobrov povprašali o njihovih prijateljstvih, smo dobili naslednje odgovore:

- Miha je prijatelj z Laro, Janezom in Petrom.
- Janez je prijatelj z Miho in Ano.
- Ana je Janezova prijateljica.
- Peter je prijatelj z Miho in Laro.
- Lara prijateljuje z Miho in Petrom.

Nato so bobri tudi narisali svoja prijateljstva, kot prikazuje slika. Vsak bober je predstavljen s krogom in dva kroga sta povezana, če sta bobra, ki ju predstavljata prijatelja. Vendar so pozabili v kroge zapisati svoja imena.



Če primerjamo poznana prijateljstva med bobri s sliko, ugotovimo, da se ne ujemajo: na sliki je narisano še eno prijateljstvo, ki ga bobri niso omenili. Kaj lahko sklepate o tem dodatnem prijateljstvu?

- A. Janez in Peter sta prijatelja.
- B. Janez ima še enega prijatelja, vendar ne vemo, katerega.
- C. Ana ima še enega prijatelja, vendar ne vemo, katerega.
- D. Nimamo dovolj informacij, da bi lahko zagotovo vedeli karkoli od zgoraj naštetega.

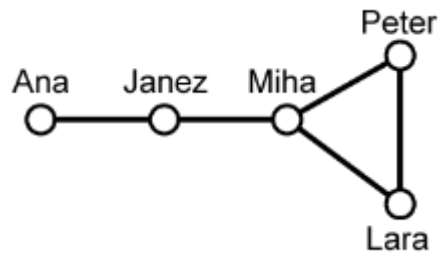
## Rešitev

Pravilen je odgovor B. Ugotovimo lahko, da je Janez prijatelj ali s Petrom ali z Laro, a ne moremo vedeti, s katerim od njiju.

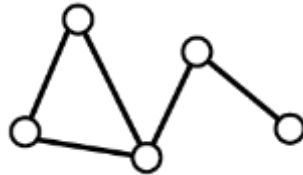
Problem najlažje rešimo tako, da narišemo sliko, ki bi jo narisali bobri, če ne bi imeli dodatnega prijateljstva. Seveda, za razliko od površnih bobrov, pri tem ne pozabimo zapisati tudi imen. Naša slika je lahko takšna (ali podobna):







Primerjava obeh slik pokaže, da če sliki, ki so jo narisali bobri, odstranimo eno povezavo, dobimo enake povezave, kot jih ima naša slika:



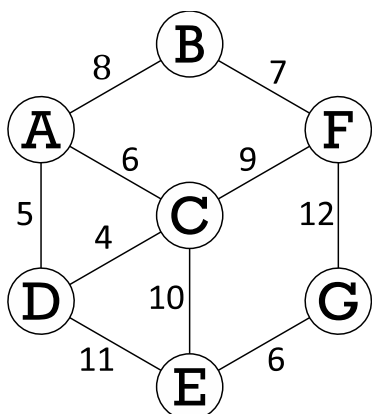
Sedaj lahko na sliko vpišemo še nekaj manjkajočih imen: od desne proti levi krogi ustrezajo Ani, Janezu in Mihi. Za ostala dva kroga ne moremo vedeti, katera bobra predstavljata – zgornji je lahko Peter in spodnji Lara, ali pa ravno obratno.

Torej lahko ugotovimo le to, da dodatna povezava povezuje Janeza s Petrom ali z Laro.

### Računalniško ozadje

Take slike s krogi in povezavami imenujemo grafi. Grafi so ena izmed osnovnih predstavitev podatkov v računalništvu in v matematiki. V teoriji grafov kroge imenujemo vozlišča, črte, ki povezujejo vozlišča, pa imenujemo povezave. Eden izmed zanimivih problemov, ki jih pogosto rešujemo v povezavi z grafi, je, kako se podan graf prilega drugemu grafu. Če se dva grafa popolnoma prilegata drug drugemu (en graf lahko spremenimo v drugega enostavno tako, da preimenujemo njegova vozlišča in jih drugače narišemo), rečemo, da sta grafa izomorfna.



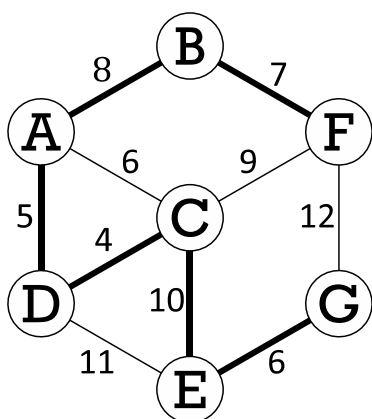


A, B, C, D, E, F in G so šefi mednarodne bobrovske mafije, znani zgolj po začetnicah svojih imen. Zaradi varnosti vsak od njih pozna le nekaj drugih šefov; kdo pozna koga kažejo povezave.

Številke ob povezavah kažejo cene mednarodnih telefonskih klicev. Ker je bobrovska mafija relativno revna, bi radi za telefoniranje porabili čim manj denarja.

Bober B je izvedel za transport, ki bi ga kazalo oropati. Novico o tem je potrebno razširiti med ostale bobre. Koliko denarja bodo porabili, če se med seboj pokličejo na čim cenejši način?

## Rešitev



Naloge se lahko lotimo na več načinov. Najpreprostejši je tale.

Komu bo povedal B? F-ju, ker je to najcenejše.

Komu bosta povedala B in F? A-ju, ker ju to stane le 8. Če bi C-ju, bi ju 9, če G-ju pa 12.

Komu bodo povedali A, B in F? D-ju, kar jih stane 5. Če bi C-ju, bi jih 6, če G-ju 12.

Komu bodo povedali A, B, F in D? C-ju, saj to stane le 4. Naslednji, ki izve, je E, na koncu pa še G.

Vse skupaj torej stane 40. Če dobro razmislimo, vidimo, da bomo dobili enake povezave tudi, če bi za rop izvedel kdo drug, recimo D ali E ali celo G. Kar razmislite. Obveščanje vedno stane enako.

Drug način, kako priti do iste rešitve je, da najprej dodamo najcenejšo povezavo, to je 4. Nato dodamo drugo najcenejšo, 5. Tretje, 6 med A in C ne dodamo, saj ne prinese ničesar novega. Pač pa lahko dodamo povezavo 6 med E in G...

## Računalniško ozadje

Temu, kar smo sestavili, pravimo najmanjše vpeto drevo. Tule gre sicer bolj za "pot" od F do G, pri kakih drugih podatkih pa bi lahko dobili tudi bolj razvejano rešitev. Postopek za sestavljanje najmanjših vpetih dreves so si prvič izmislili za kar podoben problem: načrtovanje telefonskih povezav, pri katerih bi porabili čim manj žice.





Mladi bobri Ana, Borut, Cvetka, Darko in Emil, vsi različno veliki, so zate pripravili uganko. Postavili so se v vrsto, eden za drugim, vsi obrnjeni v isto smer, v nekem vrstnem redu, ki so si ga določili sami. Nato je vsak od njih preštel, koliko bobrov je večjih od njega v vrsti pred njim in koliko za njim. Svoje ugotovitve so zapisali v spodnjo tabelo:

| ime bobra | število bobrov, ki so večji |    |
|-----------|-----------------------------|----|
|           | pred                        | za |
| Ana       | 1                           | 2  |
| Borut     | 3                           | 1  |
| Cvetka    | 1                           | 0  |
| Darko     | 0                           | 0  |
| Emil      | 2                           | 0  |

V kakšnem vrstnem redu stojijo bobri?

## Rešitev

Darko, Ana, Cvetka, Borut, Emil.



**Darko**



**Ana**



**Cvetka**



**Borut**



**Emil**

Iz tabele, v kateri je zapisano število večjih bobrov pred in za posameznim bobrom v vrsti, lahko sklepamo, da je Darko največji (določimo mu velikost 5), ker niti pred njim niti za njim ni nobenega bobra, ki bi bil večji. Po velikosti nato sledi Cvetka (velikost 4), pri kateri je v tabeli zapisan le en večji bober. Sledijo še Emil (velikost 3), Ana (velikost 2) in Borut (velikost 1), ki je najmanjši med vsemi bobri.



Darko mora biti prvi v vrsti, saj imajo vsi ostali bobri vsaj enega večjega bobra v vrsti pred njimi. Podobno mora biti Borut na četrtem mestu v vrsti, saj so pred njim trije večji bobri in eden večji za njim.

|           |  |  |           |  |
|-----------|--|--|-----------|--|
| Darko (5) |  |  | Borut (1) |  |
|-----------|--|--|-----------|--|

Ker stojita za Ano dva večja bobra (to morata biti Cvetka in Emil) in ker je Borut manjši od nje, lahko Ana stoji le na drugem mestu v vrsti.

|           |         |  |           |  |
|-----------|---------|--|-----------|--|
| Darko (5) | Ana (2) |  | Borut (1) |  |
|-----------|---------|--|-----------|--|

Ker za Emilom ni nobenega večjega bobra, mora biti Cvetka v vrsti pred njim. Torej je Emil zadnji v vrsti.

|           |         |            |           |          |
|-----------|---------|------------|-----------|----------|
| Darko (5) | Ana (2) | Cvetka (4) | Borut (1) | Emil (3) |
|-----------|---------|------------|-----------|----------|

### Računalniško ozadje

Razvrščanje (sortiranje) je eden od osnovnih konceptov v računalništvu. Pri reševanju mnogih problemov uporabimo razvrščanje kot prvi korak k rešitvi, saj le-to omogoča razvrstitev neurejenih podatkov in posledično poenostavi algoritem za rešitev problema.

Logika je močno povezana z računalništvom. Ko rešujemo logični problem ali pa ko pišemo računalniški program, navadno izdelujemo rešitev po korakih; v vsakem koraku rešimo del problema in delne rešitve uporabimo pri rešitvi celotnega problema.





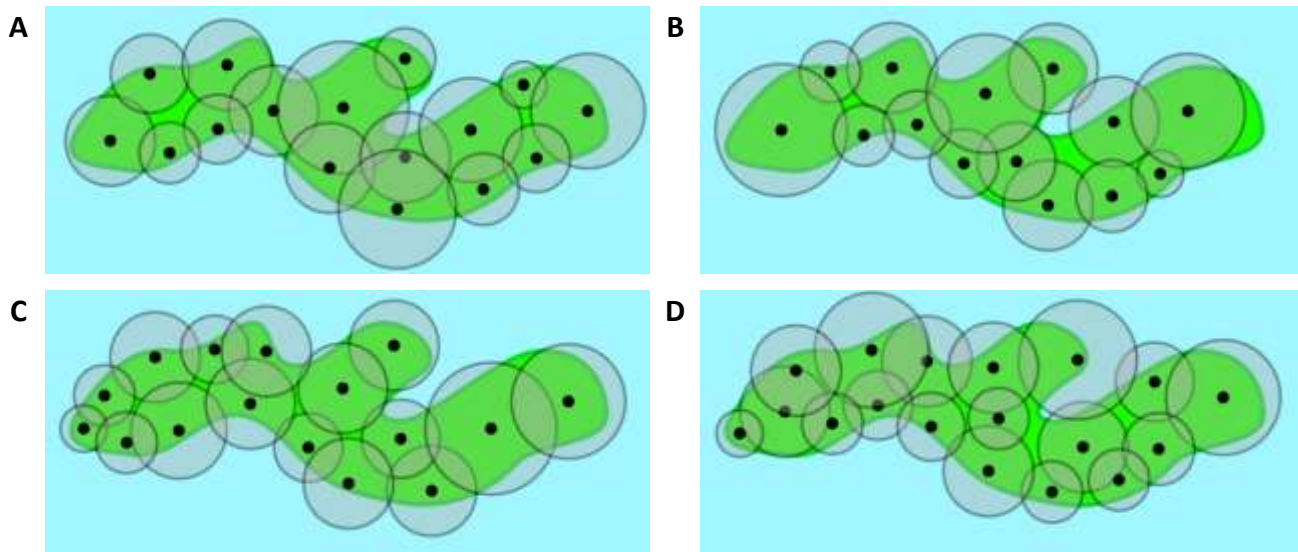
Podjetje Bober Telekom želi postaviti mobilno omrežje na Vetrovnem otoku.

Mobilno omrežje sestavlja več baznih postaj, vsaka bazna postaja pa s svojim signalom pokriva določeno območje (na sliki krog okoli bazne postaje, ki je v centru kroga). Za dve bazni postaji rečemo, da sta povezani, če se njuni področji dosega signala prekrivata. Dve bazni postaji lahko komunicirata med seboj, če sta povezani, pa tudi preko zaporedja medsebojno povezanih baznih postaj.



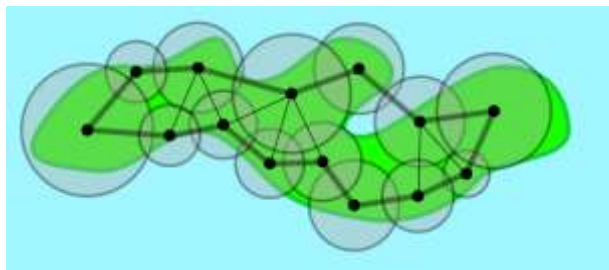
Na Vetrovnem otoku vedno močno piha in veter pogosto poškoduje bazne postaje. Bober Telekom želi postaviti bolj vzdržljivo omrežje, ki bi v primeru izpada ene bazne postaje še vedno delovalo, tako da bi vse bazne postaje (razen okvarjene) še vedno lahko medsebojno komunicirale.

Katera od spodnjih rešitev prikazuje primerno postavitev baznih postaj na otoku, da bo temu pogoju zadoščeno?

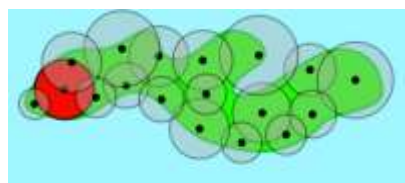
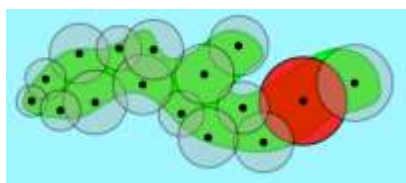
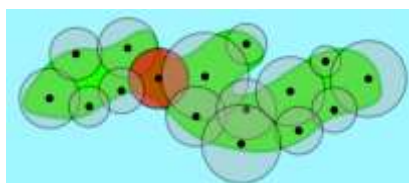


## Rešitev

Pravilna rešitev je B. Če sledimo obali, vidimo, da so bazne postaje povezane v zanko, tako da v primeru izpada ene postaje signal še vedno lahko potuje med poljubnima dvema postajama. Povezanost postaj je prikazana na spodnji sliki.



V ostalih primerih (A, C in D) pa lahko najdemo vsaj eno bazno postajo, katere odpoved povzroči, da bazne postaje z dveh različnih koncev otoka ne morejo več komunicirati med sabo. Primer take postaje je za vsako od rešitev prikazan na spodnjih slikah (področje dosega te bazne postaje je označena rdeče).



## Računalniško ozadje

Postavitev baznih postaj (oglišča ali vozlišča) in njihova medsebojna povezanost imenujemo graf ali topologija omrežja. Raziskave takih struktur so zelo uporabne tudi za industrijo, saj omogočajo načrtovanje takih sistemov, ki so kar najbolj zanesljivi. Podobne strukture so lahko fizične ali logične in jih najdemo v različnih oblikah, kot so obroč, mreža in podobno. Uporaba takih znanih struktur nam omogoča tudi ocenjevanje njihovih lastnosti, predvsem v povezavi z različnimi vidiki njihove uporabnosti.





Logična vrata imajo enega ali dva vhoda na levi strani in izhod na desni strani. Vrata vklopijo (1) ali izklopijo (0) tok na izhodu, odvisno od toka na vhodu.



Če je vhod vklopljen (1), je izhod izklopljen (0).

Če je vhod izklopljen (0), je izhod vklopljen (1).

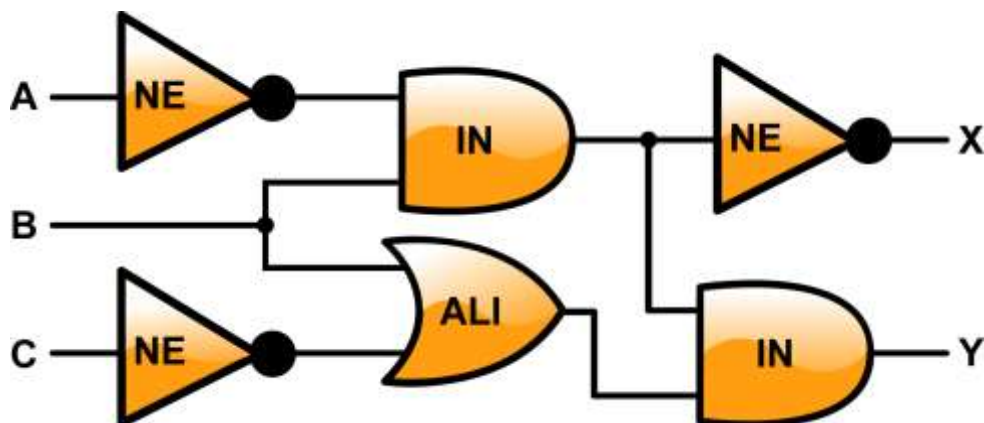


Izhod je vklopljen (1), le če sta oba vhoda vklopljena (1).



Izhod je vklopljen (1) vedno, razen v primeru, ko sta oba vhoda izklopljena (0).

Recimo, da je vhod A izklopljen (0), vhoda B in C pa sta vklopljena (1). Kaj dobimo na izhodih X in Y na spodnji sliki?

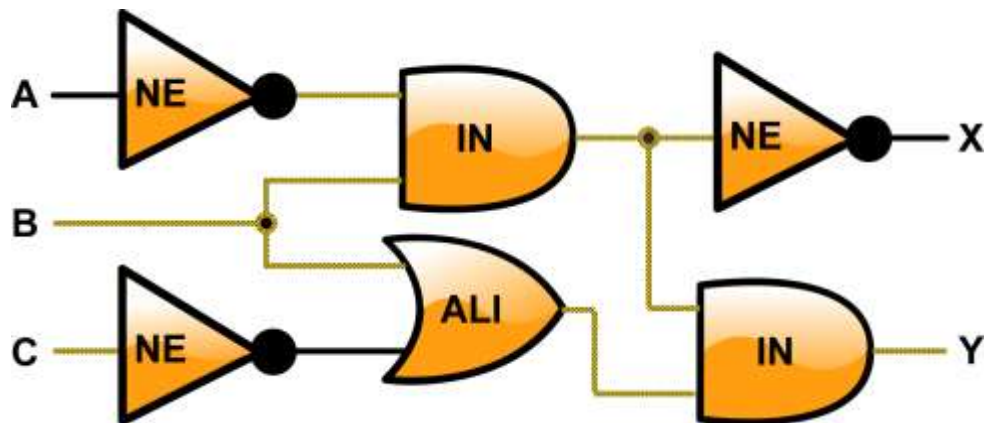




## Rešitev

X je izklopljen (0), Y je vklopljen (1)

Do rezultata pridemo tako, da sledimo toku in njegovim spremembam. Na spodnji sliki smo povezave, po katerih teče tok (vklopljene), označili rumeno-črno, povezave, po katerih ne teče tok (izklopljene), pa so ostale črne.



### Računalniško ozadje

Logična vrata so osnovni gradniki digitalne elektronike, kot so računalniški procesorji. Ničle in enke so predstavljene z izklopom in vklopom električnega toka. V današnjih procesorjih najdemo na milijone takih vrat, ki so ustrezno povezana, da omogočajo delovanje računalnika.

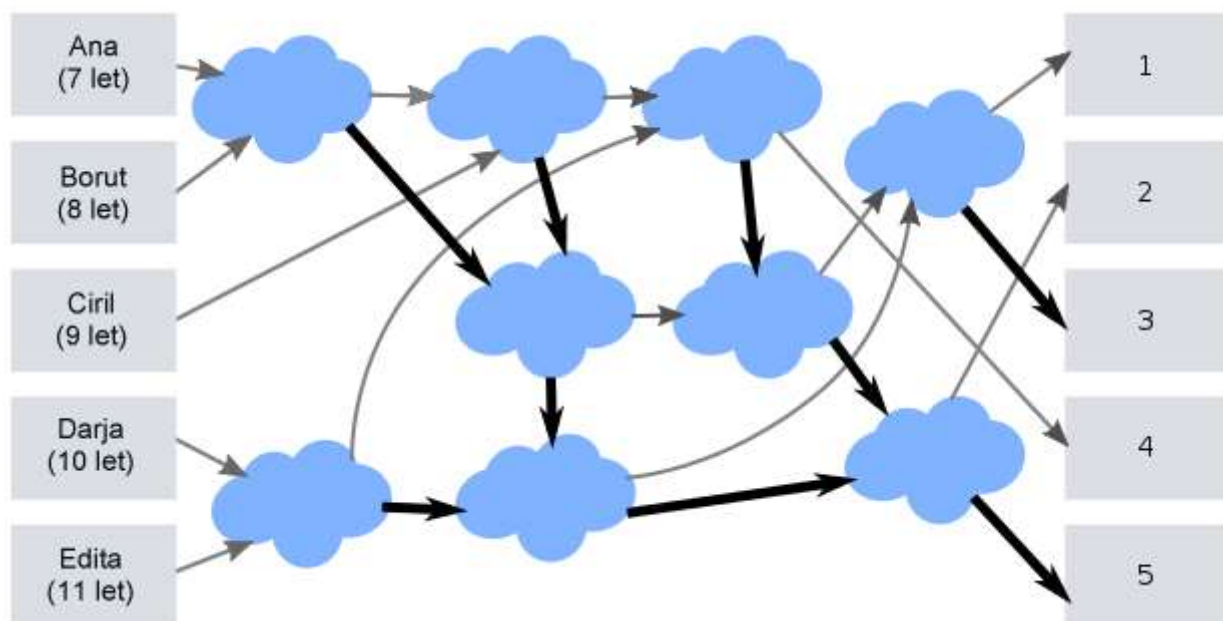
Analizo takega omrežja lahko naredimo z uporabo Boolove algebre. Tako lahko na primer pokažemo, da vhod C ne vpliva na noben izhod v vezju na zgornji sliki.







Pet bobrov, Ana (7 let), Borut (8 let), Ciril (9 let), Darja (10 let) in Edita (11 let), se igra igro, v kateri se sprehajajo po oblakih. Na vsakem oblaku počakajo, da nanj prispe tudi drugi bober, nato pa starejši bober nadaljuje pot do naslednjega oblaka po debeli puščici, medtem ko mlajši bober sledi tanki puščici.



Na katere izhode bodo prišli bobri na koncu igre?

**A**

1: Ana  
2: Borut  
3: Ciril  
4: Darja  
5: Edita

**B**

1: Edita  
2: Darja  
3: Ciril  
4: Borut  
5: Ana

**C**

1: Borut  
2: Darja  
3: Ciril  
4: Ana  
5: Edita

**D**

1: Borut  
2: Ciril  
3: Darja  
4: Ana  
5: Edita



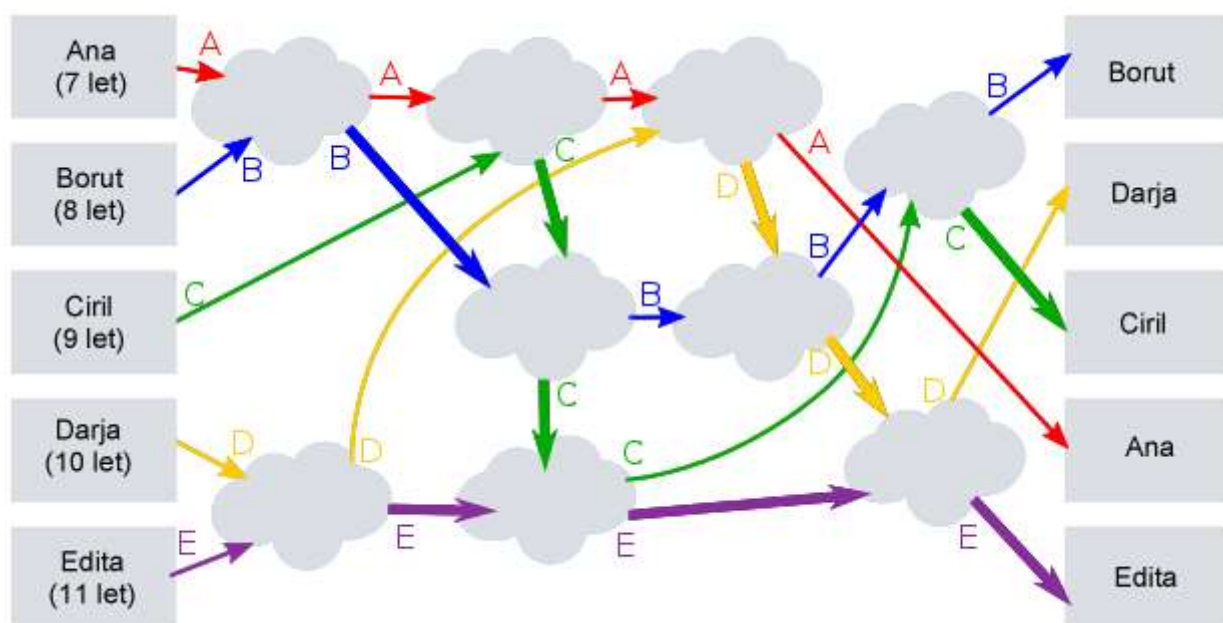
## Rešitev

Pravilni odgovor je C. Preverimo vse ponujene rešitve.

Odgovor A je napačen. Najmlajši bober, Ana, vedno sledi tankim puščicam, katere vodijo do izhoda 4.

Odgovor B je napačen. Najstarejši bober, Edita, vedno sledi debelim puščicam, katere vodijo do izhoda 5.

Odgovor C je pravilen. Slika prikazuje premike posameznih bobrov (na sliki so označeni vsak v svoji barvi in z začetnico imena).



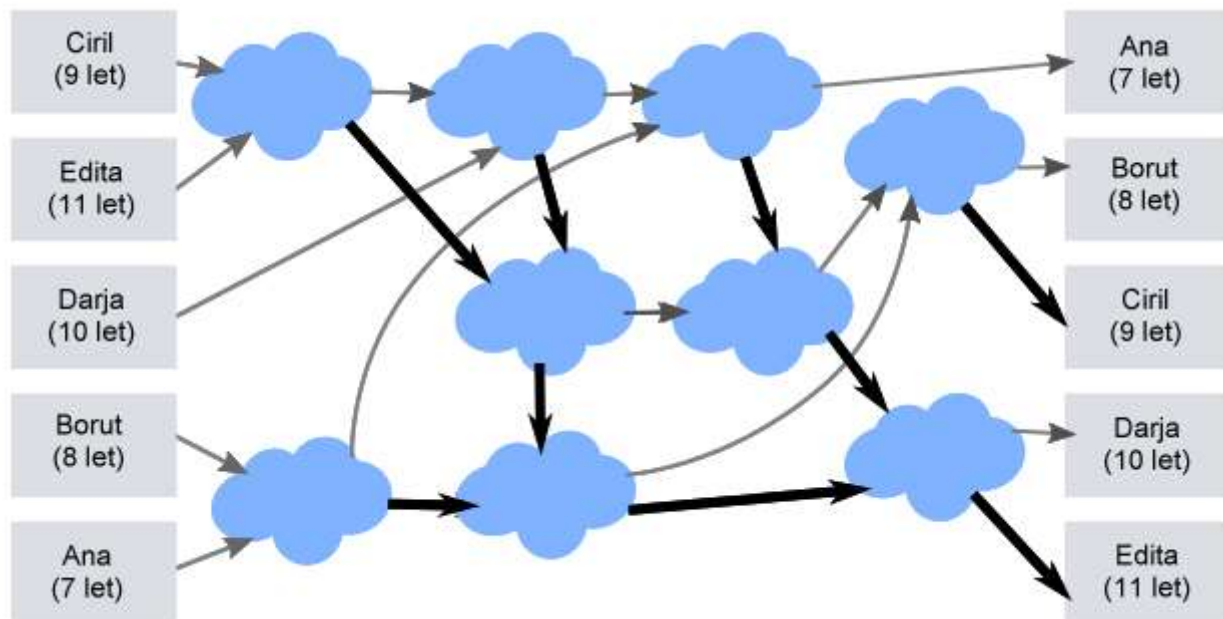
Odgovor D je napačen. Ana mora biti na izhodu 4, Edita pa na izhodu 5, zato sta zadnja dva izhoda pravilno določena. Darja je druga najstarejša med bobri, zato sledi tanki puščici dvakrat, ko se na oblaku sreča z najstarejšo Edito. Tako Darja sledi tanki puščici na prvem oblaku, nato po debelih puščicah pride do skrajno desnega spodnjega oblaka, kjer mora zaradi ponovnega srečanja z Edito spet slediti tanki puščici, ki jo pripelje na drugi izhod.

## Računalniško ozadje

Podano omrežje sestavlja množica povezav med oblaki, vsak oblak pa je neke vrste primerjalnik, v katerem primerjamo vrednosti na vhodnih povezavah ter ustrezno usmerimo manjšo in večjo od obeh vrednosti naprej po različnih povezavah. Če v takem omrežju oblake (primerjalnike) povežemo na pravi način, lahko omrežje ureja zaporedje neurejenih vrednosti. Tako omrežje imenujemo urejevalno omrežje. Taka omrežja lahko delujejo vzporedno, zato so zelo učinkovita pri sortiranju vrednosti.

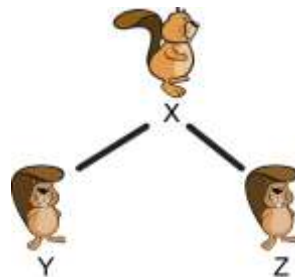


V primeru naše naloge omrežje sicer ne ureja, ker primerjalniki niso povezani na tak način. Omrežje na zgornji sliki vrne le vhodno zaporedje v drugem vrstnem redu. Spodnja slika prikazuje omrežje s spremenjenimi povezavami, tako da omogoča urejanje poljubnega vhoda:





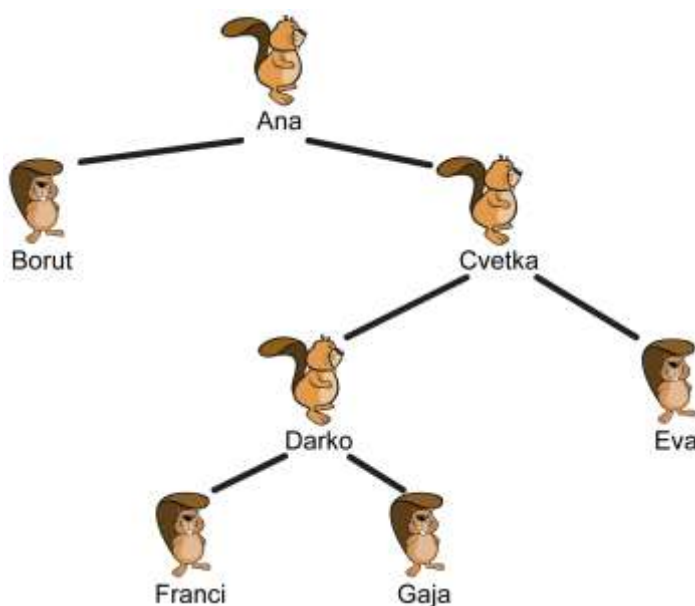
Sedem bobrov (Ana, Borut, Cvetka, Darko, Eva, Franci in Gaja) si je zamislilo igro, v kateri se razporedijo tako, da nekateri bobri z repom kažejo na enega bobra, obrnjeni pa so k drugemu bobru. Spodnja slika prikazuje bobra X, ki z repom kaže na bobra Y, obrnjen pa je k bobru Z. Bobra Y in Z ne kažeta na nobenega bobra.



Pravila igre so takšna. Ko je bober potrepljan po glavi, pove svoje ime, če ne kaže na nobenega drugega bobra. Sicer pa, ob predpostavki, da potrepljani bober X kaže na Y z repom in na Z s pogledom, naredi naslednje v tem zaporedju:

1. Bober X potreplja bobra Y.
2. Bober X počaka, da bober Y pove svoje ime.
3. Bober X potreplja bobra Z.
4. Bober X počaka, da bober Z pove svoje ime.
5. Bober X pove svoje ime.

Naših sedem bobrov se je postavilo, kot kaže slika. Cvetka, na primer z repom kaže na Darka ter gleda Evo.



Na začetku igre so potrepljali Ano. V kakšnem vrstnem redu so bobri povedali svoja imena?

- A. Borut, Franci, Darko, Gaja, Cvetka, Eva, Ana
- B. Borut, Ana, Cvetka, Darko, Franci, Gaja, Eva
- C. Borut, Franci, Gaja, Darko, Eva, Cvetka, Ana
- D. Borut, Ana, Cvetka, Franci, Gaja, Darko, Eva

## Rešitev

Pravilni odgovor je C.

Če upoštevamo opisana navodila igre, vsak bober pove svoje ime šele, ko vsi bobri, na katere kaže, povejo svoja imena. Torej bo Ana povedala svoje ime zadnja (odgovora B in D nista pravilna) in Cvetka bo povedala svoje ime za Darkom in Evo (odgovor A je napačen). Torej odgovori A, B in D ne morejo biti pravilni, ostane le odgovor C. Da je pravilen, lahko preverimo, če sledimo navodilom igre.

## Računalniško ozadje

Naloga vključuje vsaj dva osnovna računalniška koncepta: binarno drevo in rekurzijo. Slika kaže binarno drevo, ki ga uporabljamo za predstavitev podatkov, ki so »ugnezdeni« ali urejeni v hierarhijo. Večje binarno drevo je sestavljeno iz več manjših binarnih dreves, podobno kot lahko najdemo primerke X, Y in Z tudi na sliki sedmih bobrov. To omogoča, da je naloga rekurzivna, kar pomeni, da je naloga (ali algoritem rešitve) opisana sama s sabo. Skrbna uporaba binarnih dreves in rekurzije nam omogoča reševanje široke množice problemov na naraven in učinkovit način.





V dvojiškem (binarnem) številskem sistemu imamo le dve števk, to sta 0 in 1. Zapis v dvojiškem sistemu označimo s številko 2, ki jo zapišemo spodaj desno ob številu. Števila od 1 do 6 lahko tako zapišemo v dvojiškem sistemu kot  $1_2$ ,  $10_2$ ,  $11_2$ ,  $100_2$ ,  $101_2$  in  $110_2$ . Upoštevajte naslednja pomembna števila:  $1 = 1_2$ ,  $2 = 10_2$ ,  $4 = 100_2$ ,  $8 = 1000_2$  in tako naprej. Seveda lahko v dvojiškem načinu zapišemo tudi ulomke.

Kako bi lahko v dvojiškem sistemu zapisali število 0,5?

- A.  $0,1_2$
- B.  $0,101_2$
- C.  $0,5_2$
- D.  $1,2_2$

## Rešitev

Pravilni odgovor je A, to je,  $0,1_2$ .

V dvojiškem sistemu prva številka za »decimalno« vejico predstavlja polovico (v desetiškem sistemu predstavlja desetino). Ker je 0,5 ena polovica, zapišemo 1 na pozicijo polovice:  $0,1_2$ .

Rešitev lahko poiščemo tudi med podanimi možnimi odgovori. Odgovora C ( $0,5_2$ ) in D ( $1,2_2$ ) ne moreta biti pravilna, saj vsebujeta tudi druge številke, ne le 0 in 1.

Tudi odgovor B ( $0,101_2$ ) ni pravilen. Čeprav  $101_2$  pomeni 5, število  $0,101_2$  ne pomeni pet desetih, ampak pet osmin, saj pozicije za vejico niso desetine, stotine in tisočine, ampak polovice, četrtine in osmine.

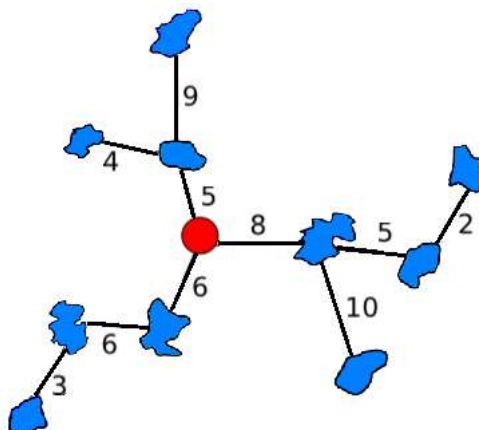
## Računalniško ozadje

Računalniki delajo le z dvojiškimi števili (binarnimi števili). Sistem za predstavitev pozitivnih celih števil lahko razširimo tudi na dvojiške ulomke, in sicer na podoben način, kot uporabljamo desetiške (decimalne) ulomke. Zanimivo, da podobno kot ima ulomek  $1/3 = 0,33333...$  v desetiški obliki neskončno ponovitev števke 3, tudi števila 0,2 ne moremo predstaviti s končnim dvojiškim ulomkom:  $0,2 = 0,001100110011..._2$ .





Medved Jaka se s prijateljico vidro Meto igra skrivalnice. Meta se skriva v enega od modrih jezer in Jaka jo začne iskati. Za iskanje ima na voljo 50 sekund. Z iskanjem začne v rdeči točki, premika pa se lahko le po povezavah med jezeri. Vsak premik med dvema jezeroma mu vzame toliko sekund, kot je zapisano na povezavi med jezeroma. Če pravočasno najde vidro Meto, zavpije »En, dva, tri, Meta!« na ves glas, da ga lahko vsi slišijo.



Koliko možnih skrivališč lahko Jaka obiše v 50 sekundah?

## Rešitev

Šest. Najprej gre Jaka na desno po povezavah do jezer, do katerih porabi 8, 5 in 2 sekundi ter se po isti poti vrne na izhodišče. Za to porabi 30 sekund. Nato pregleda še jezera navzdol od izhodišča, do katerih potrebuje 6, 6 in 3 sekunde. Torej po 45 sekundah uspe obiskati šest jezer, v katerih bi se lahko skrivala Meta.

## Računalniško ozadje

Sistem medsebojno povezanih krajev (vozlišč) imenujemo graf. Če v grafu nimamo ciklov (poti, po katerih se vrnemo na isto mesto), tak graf imenujemo drevo. Drevo imamo tudi v našem primeru jezer za skrivalnice. V računalništvu se grafi in še posebej drevesa veliko uporabljajo, predvsem pri shranjevanju večjih količin podatkov. Zato so učinkoviti algoritmi za preiskovanje dreves in grafov zelo pomemben del računalništva.



